

S t u d i e n a r b e i t

für Herrn cand. mach. Volker Hornung

Systemanalyse und Reglerentwurf am Beispiel einer elektromagnetischen
Aufhängung.
Ergänzung zum Versuch "Analogrechner II" des Regelungstechnischen
Praktikums

Eine der möglichen Vorgehensweisen bei der Untersuchung dynamischer Systeme ist es, ausgehend von den technischen Gegebenheiten, ein physikalisches Modell zu entwickeln und dieses in Form von Differential- oder Integralgleichungen mathematisch zu formulieren. Diese Art der Systemidentifikation bietet gegenüber anderen Verfahren den Vorteil der Allgemeinheit und Flexibilität und kommt weitgehend ohne Experimente aus. Die Möglichkeit, derartige Untersuchungen bereits im Planungsstadium technischer Anlagen durchführen zu können, wiegt die gegenüber experimentellen Verfahren im allgemeinen geringere Genauigkeit bei weitem auf.

Die Behandlung der mathematischen Modelle ist oft recht schwierig, und eine explizite Lösung kann nur in einfachen Fällen angegeben werden. Um die Aussagekraft einer theoretischen Systemanalyse voll nutzen zu können, ist daher der Einsatz elektronischer Rechner notwendig.

Im Rahmen des regelungstechnischen Praktikums sollen den Teilnehmern an zwei Versuchsnachmittagen die Grundlagen der Analogrechentechnik vermittelt werden. Der Versuch "Analogrechner I" soll die Fragen der Verstärkerbeschaltung und der Normierung klären. Hierauf aufbauend sollen im Versuch "Analogrechner II" die Einsatzmöglichkeiten des Rechners am Beispiel eines Reglerentwurfs dargestellt werden.

Als Strecke wird eine magnetische Aufhängung betrachtet. Die Bewegungsgleichung dieses nichtlinearen und instabilen Systems wird in der bisherigen Fassung der Versuchsbeschreibung vorgegeben. Diese Gleichung wird um einen gegebenen Betriebspunkt linearisiert. Die resultierende Übertragungsfunktion ist Ausgangspunkt eines Reglerentwurfs mit Hilfe des Wurzelortskurvenverfahrens. Das sich ergebende lineare Gesamtsystem wird am Analogrechner simuliert.

Die angestrebte Neufassung des Versuchs soll ein vorhandenes Modell einer magnetischen Aufhängung mit einbeziehen. Hierzu ist die Abhängigkeit der auf den Schwebekörper wirkenden Kraft vom Abstand des Körpers vom Magneten sowie vom Strom, der durch die Magnetspule fließt, experimentell zu ermitteln. Außerdem ist die Kennlinie der optischen Einrichtung zur Abstandsmessung zu ermitteln. Auf der Grundlage dieser Messungen ist der Reglerentwurf zu überarbeiten.

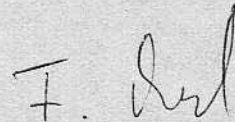
Es soll geprüft werden, ob es didaktisch sinnvoll ist, bei der Simulation des Systems die nichtlinearen Elemente mit einzubeziehen.

Der überarbeitete Versuch soll folgende Punkte umfassen:

1. Systemanalyse unter Berücksichtigung der gemessenen Kennlinien;
2. Reglerentwurf für das linearisierte System mit Hilfe des Wurzelortskurvenverfahrens;
3. Simulation des Gesamtsystems am Analogrechner;
4. Regelung der vorhandenen magnetischen Aufhängung mit Hilfe des am Analogrechner programmierten Reglers;
5. Vergleich von Simulation und Modellaufbau.

Ziel der Studienarbeit ist die Ausarbeitung einer Versuchsanleitung, die Erstellung sämtlicher Unterlagen zur Versuchsdurchführung und die Anpassung des Modellaufbaus an die Erfordernisse des Praktikums.

Bearbeitungszeit: 6 Monate
Betreuer: Dipl.-Ing. H. Braun
Ausgabe der Arbeit: 1.5.1979
Abgabe der Arbeit: 1.7.80



(Prof. Dr.-Ing. F. Mesch)

Systemanalyse und Reglerentwurf am Beispiel einer elektromagnetischen Aufhängung .

1. Systemanalyse
 - 1.1 Systemanalyse am Beispiel einer elektromagnetischen Aufhängung
 - 1.2 Teilsysteme des Regelkreises
 - 1.2.1 Meßsystem
 - 1.2.2 Regler
 - 1.2.3 Steuerung der magnetischen Feldstärke
 - 1.3 Blockschaltbild des Regelkreises
 - 1.4 Übertragungsfunktion des offenen Kreises
2. Reglerentwurf
 - 2.1 Stabilitätsuntersuchung anhand des Hurwitz-Kriteriums
 - 2.2 Zeichnen der Wurzelortskurve
 - 2.3 Wurzelortskurvendiskussion
 - 2.4 Einstellmöglichkeiten an der Versuchseinrichtung
 - 2.4.1 PID-Regler
 - 2.4.2 PD-Regler
 - 2.5 Parameterempfindlichkeit
3. Simulation auf dem Analogrechner
 - 3.1 Schaltungsentwurf
 - 3.1.1 Strecke
 - 3.1.2 Verzögerungsglied
 - 3.1.3 Lichtschrankensystem , Soll-Istwertvergleich , Trennverstärker
 - 3.1.4 Regler
 - 3.1.5 AR-Schaltung
 - 3.1.6 Kopplung der Teilsysteme
 - 3.1.7 Beispiel
4. Schaltungsbeschreibung , Schaltplan , Stückliste
5. Literatur

Anhang : Überarbeiteter Versuch "Analogrechnen II" mit Versuchsanleitung

1. Systemanalyse

Die mathematische Beschreibung eines technischen Systems ist prinzipiell anhand einer theoretischen Herleitung aus physikalischen Grundgesetzen möglich. Aus der Geometrie, physikalischen Zusammenhängen und Stoffkonstanten lassen sich die zugehörigen Parameter bestimmen.

Eine exakte mathematische Beschreibung erfordert jedoch bisweilen einen sehr hohen Aufwand, so daß eine experimentelle Systemidentifikation von Vorteil sein kann. Dabei wird aus Messungen auf die Systemgleichungen rückgeschlossen, was jedoch bei komplizierteren, wie nichtlinearen oder instabilen, Systemen schwierig wird.

Bei stark nichtlinearen Systemen können die Linearität voraussetzenden Verfahren nicht mehr angewendet werden, und es muß überlegt werden, ob eine Linearisierung statthaft ist. Instabile Systeme sind schwer zu behandeln, da sie keine stabile Lage besitzen und das Verhalten ohne Regelung nicht zu kontrollieren ist.

In der Praxis geht man oft von einer vereinfachten theoretischen Herleitung aus und nimmt anschließend die Kennlinien des Systems auf. Dies führt zur Bestimmung der Parameter und zur Feststellung des Gültigkeitsbereiches der angenommenen physikalischen Gesetzmäßigkeiten [4].

1.1 Systemanalyse am Beispiel einer magnetischen Aufhängung

Am Beispiel der in Abb.1 dargestellten magnetischen Aufhängung soll nun eine Systemanalyse durchgeführt werden. Bekanntestes Beispiel für die Verwendung magnetischer Aufhängungen sind Schwebefahrzeuge wie beispielsweise der Transrapid der Firma Krauss-Maffei.

Zudem werden bei höchsten Drehzahlen oder bei extremen Ansprüchen an geringe Lagerreibung magnetische Lager benutzt. Diesen entspricht die in Versuch 9 des Regelungstechnischen Praktikums [2] zu behandelnde magnetische Aufhängung, die folgendermaßen realisiert wird.

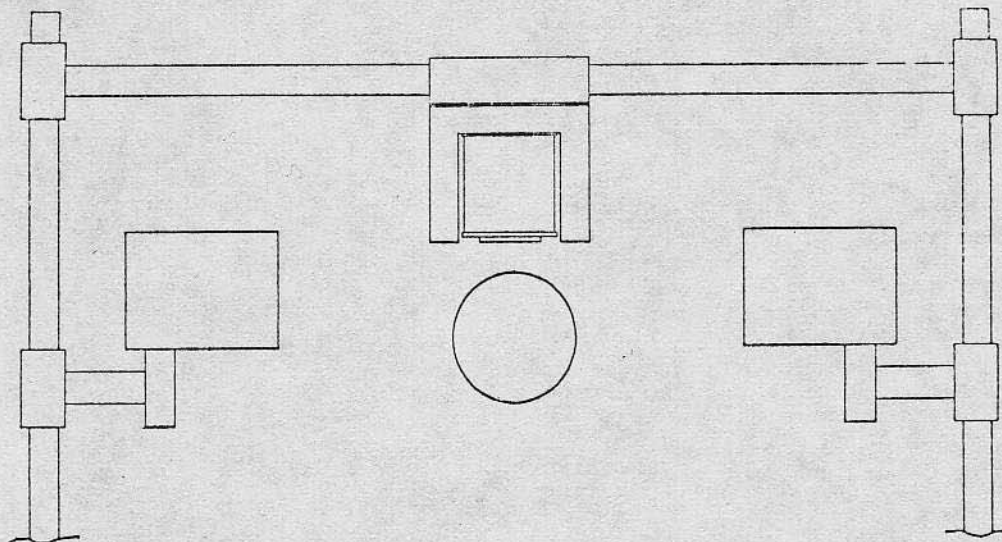
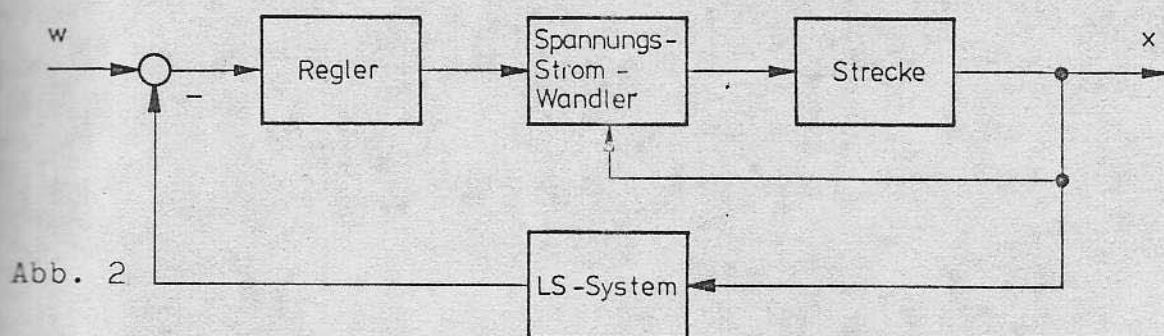


Abb. 1 Magnetische Aufhängung

In einem stromgesteuerten Magnetfeld befindet sich ein freischwebender Anker, dessen Abstand vom Magneten ein Lichtschrankensystem mißt. Dieses gibt eine dem Abstand entsprechende Spannung weiter, die mit einem wählbaren Sollwert verglichen wird. Ein nachgeschalteter PID-Regler steuert mittels dieser Information einen Spannungs-Strom-Wandler an, der seinerseits der Magnetspule einen das Magnetfeld bestimmenden Strom aufträgt (Abb.2).

Eine mögliche Rückwirkung des Ankers auf die Spuleninduktivität bei verschiedenen Abständen bleibt im folgenden zu beachten.



Die vom Magneten auf den Anker der Masse m in Bild 1 ausgeübte Kraft ist allgemein proportional der Änderung der magnetischen Energie

$$\frac{dW_m}{dx} \sim i^2 \frac{d}{dx} \frac{1}{R_m},$$

mit R_m magnetischer Widerstand des magnetischen Kreises, bei Annahme einer linearen Magnetisierungskennlinie des Eisens. Bei Vernachlässigung des magnetischen Widerstandes im Eisen und unter Voraussetzung eines homogenen Magnet-

feldes ist $R_m \sim x$, woraus $F = C \frac{i^2}{x^2}$ folgt.

Da die Berechnung der Feldverteilung wegen der komplizierten geometrischen Verhältnisse mit sehr großem Aufwand verbunden wäre, wurde das reale Verhalten untersucht. Zur Bestimmung des realen Verhaltens wurde die Gleichgewichtslage x in Abhängigkeit vom eingeprägten Strom i und dem Ankergewicht mg gemessen. Trägt man den Strom über dem Abstand bei konstantem Gewicht und Form für einen bestimmten Fall auf, so ergibt sich folgender Graph.

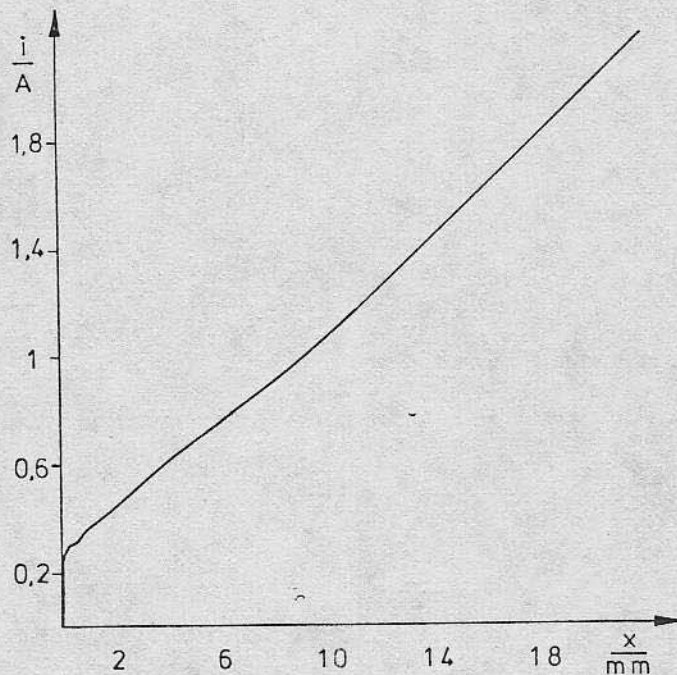


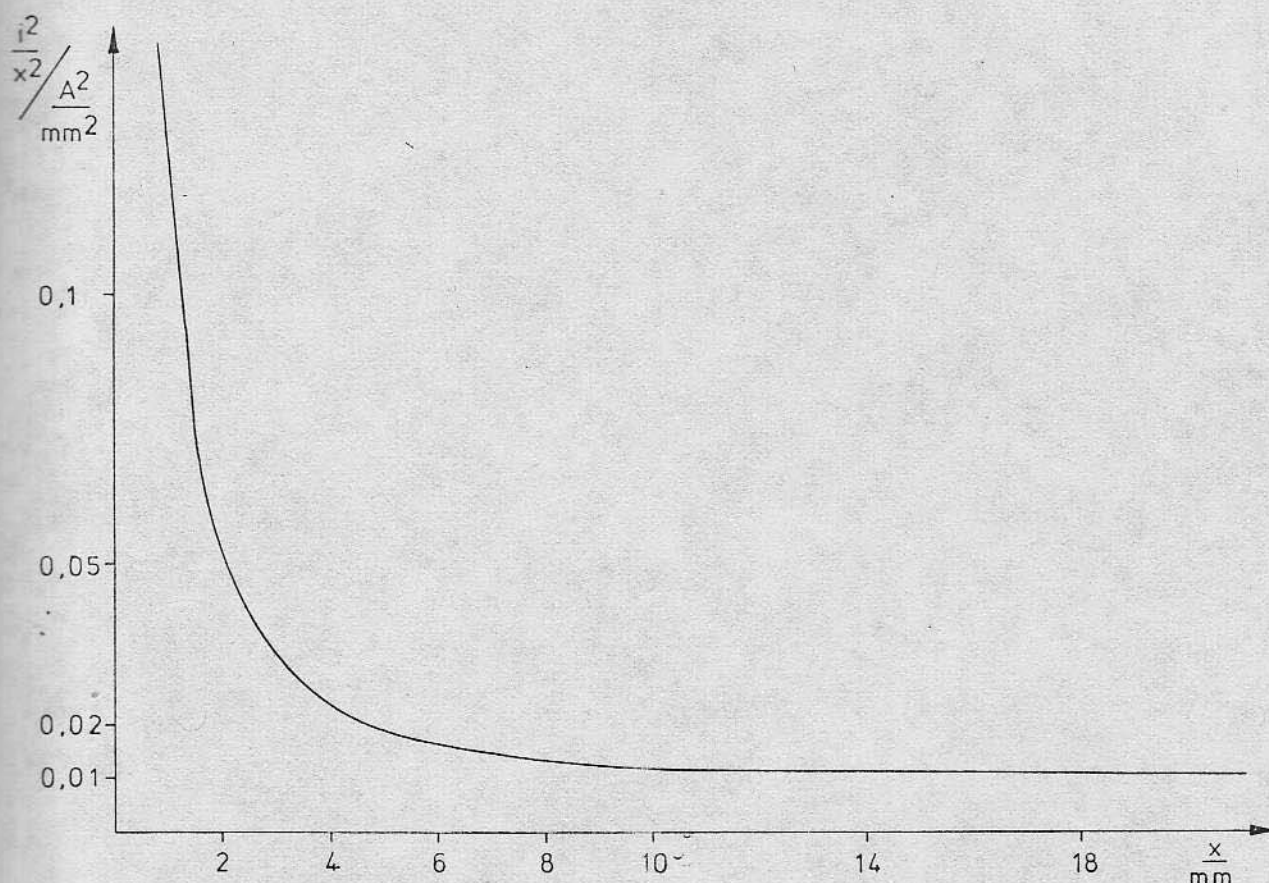
Abb. 3

Es wird erkennbar, daß der Kurvenverlauf durch eine Gerade annähernd wiedergegeben werden kann, die die Ordinate in $i = 0.27$ A schneidet. Bisher wurde nicht berücksichtigt, daß die Lage des Polschwerpunkts des Magneten unbekannt ist. Führt man eine Verschiebungskonstante x_0 ein, so folgt

$$i = \frac{F}{C} (x + x_0), \text{ was dem realen Kurvenverlauf entspricht.}$$

Abweichungen von der Geraden können auf unregelmäßige Feldgeometrie, Sättigung des Ankers und Gegeninduktivität zurückgeführt werden. Es gilt nun zu untersuchen, wie sich obiger Zusammenhang auf das Kraft-Weg-Verhalten auswirkt.

Bildet man mit den Versuchsgrößen den Quotienten $\frac{i^2}{x^2}$ und trägt diesen über dem Abstand auf, dann entspricht die gewonnene Kennlinie konstanter Kraft nur für $x > 7.5$ mm der nach dem physikalischen Modell erwarteten Waagrechten mit dem Abstand $\frac{F}{C}$ vom Ursprung (Abb.4).



Damit ergäbe sich für $7.5\text{mm} < x < \infty$ das Kraft-Weg-Gesetz

$$F = C \frac{i^2}{x^2}, \quad C = 97.8 \frac{\text{Nmm}^2}{\text{A}^2}. \quad (1)$$

Da eine Sollage $x_s > 10 \text{ mm}$ in Verbindung mit dem noch zu behandelnden Lichtschrankensystem für den Praktikumsteilnehmer sehr anschaulich ist, bietet (1) eine genügende Näherung an das reale Verhalten des Systems. Damit wird die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x}(t) = mg - C \frac{i^2(t)}{x^2(t)}. \quad (2)$$

Sie soll im Versuch zur Simulation am Analogrechner verwendet werden, um die Möglichkeit des Simulierens auch nichtlinearer Systeme und deren Behandlung am Analogrechner aufzuzeigen.

Um später einen Reglerentwurf anhand des Wurzelortskurvenverfahrens durchführen zu können, muß zunächst eine Linearisierung vorgenommen werden.

Nach Linearisierung um die Sollage x_S mit

$$i(t) = i_S + i_1(t) \quad ; \quad x(t) = x_S + x_1(t)$$

ergibt sich

$$m\ddot{x}_1(t) = mg - C \frac{i_S^2}{x_S^2} - 2C \frac{i_S}{x_S^2} i_1(t) + 2C \frac{i_S^2}{x_S^3} x_1(t) \quad .$$

In der Sollage gilt $mg = C \frac{i_S^2}{x_S^2}$.

Damit läßt sich i_S eliminieren, und man erhält die Differentialgleichung für kleine Abweichungen um die Sollage:

Mit $i_S = \sqrt{\frac{mg}{C}} x_S$ wird

$$m\ddot{x}_1(t) = mg - C \cdot \frac{mg}{C} \frac{x_S^2}{x_S^2} - 2C \cdot \frac{i_S}{x_S^2} i_1(t) + 2C \cdot \frac{i_S^2}{x_S^3} x_1(t)$$

zu

$$\frac{m}{2mg} x_S \ddot{x}_1(t) - x_1(t) = - \frac{2C}{2mg} \sqrt{\frac{mg}{C}} i_1(t)$$

und es folgt

$$- \frac{x_S}{2g} \ddot{x}_1(t) + x_1(t) = \sqrt{\frac{C}{mg}} i_1(t) \quad . \quad (3)$$

Bemerkenswert ist, daß der homogene Teil der Differentialgleichung nicht von m abhängt.

Aus Gleichung (3) ergibt sich durch Laplacetransformation

$$- \frac{x_S}{2g} p^2 X_1(p) + X_1(p) = \sqrt{\frac{C}{mg}} I_1(p)$$

die Übertragungsfunktion der Strecke zu

$$G(p) = \frac{X_1(p)}{I_1(p)} = \frac{\sqrt{\frac{C}{mg}}}{1 - \frac{x_S}{2g} \cdot p^2} = \frac{K_S}{(1 + T_p)(1 - T_p)} \quad (4)$$

mit $K_S = \sqrt{\frac{C}{mg}}$
 und $T = \sqrt{\frac{x_S}{2g}}$.

Die Strecke hat die Form von Gleichung (10) des Versuchs und ist instabil .

1.2 Teilsysteme des Regelkreises

Um einen stabilen Schwebezustand zu erreichen , sind folgende Teilsysteme erforderlich :

1.2.1 Meßsystem

Das Meßsystem , bestehend aus Strahler , optischem System und Fototransistor , dient der Erfassung des Abstandes zwischen Magnet und Anker .

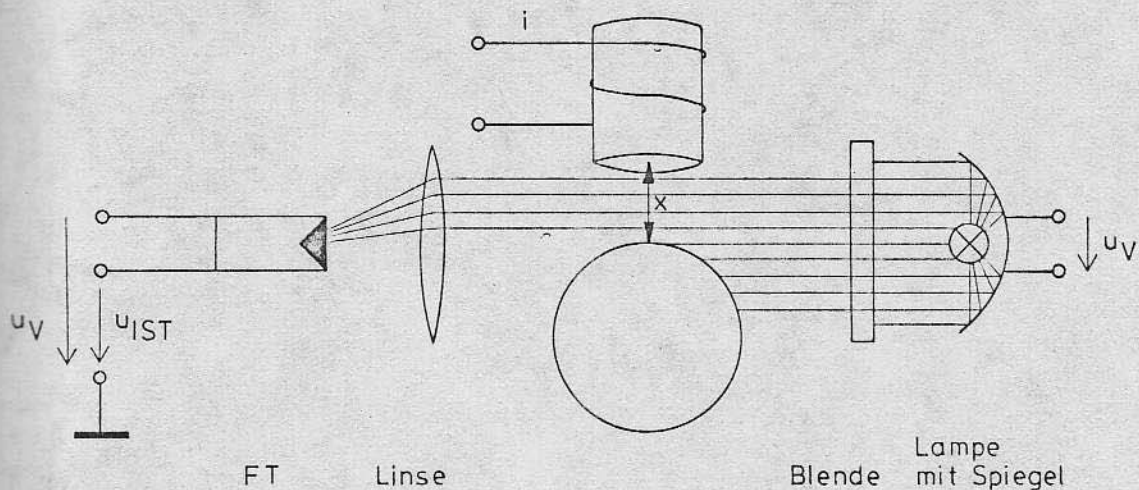


Abb. 5

Das Licht der von einer stabilisierten Stromquelle versorgten Lampe wird mittels eines Hohlspiegels durch eine Blende geschickt , die eine Beeinflussung der Ausleuchtung gestattet . Durch eine Sammellinse wird das einfallende Licht auf den Fototransistor fokussiert , der eine im Idealfall dem Abstand proportionale Spannung u_{IST} liefert .

Wegen des unsymmetrischen Aufbaus des Magnet-Ankersystems und zur Erfassung der Randbedingungen wurde eine empirische Ermittlung der Kennlinie des Meßsystems vorgenommen , die zu folgender Darstellung führt :

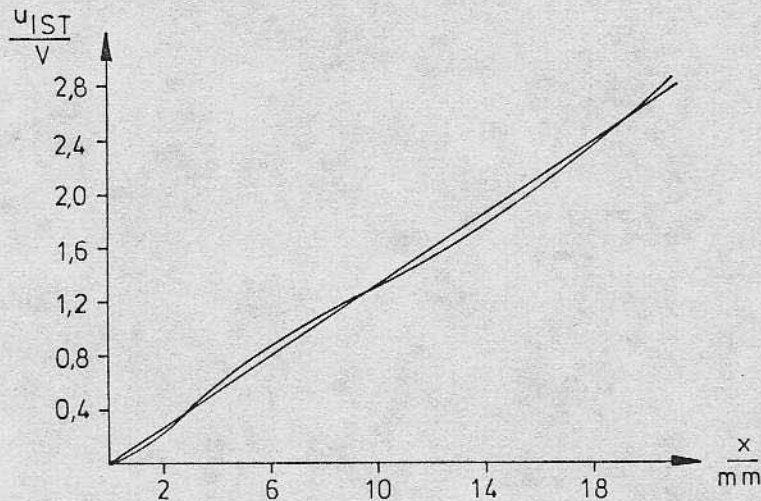


Abb. 6

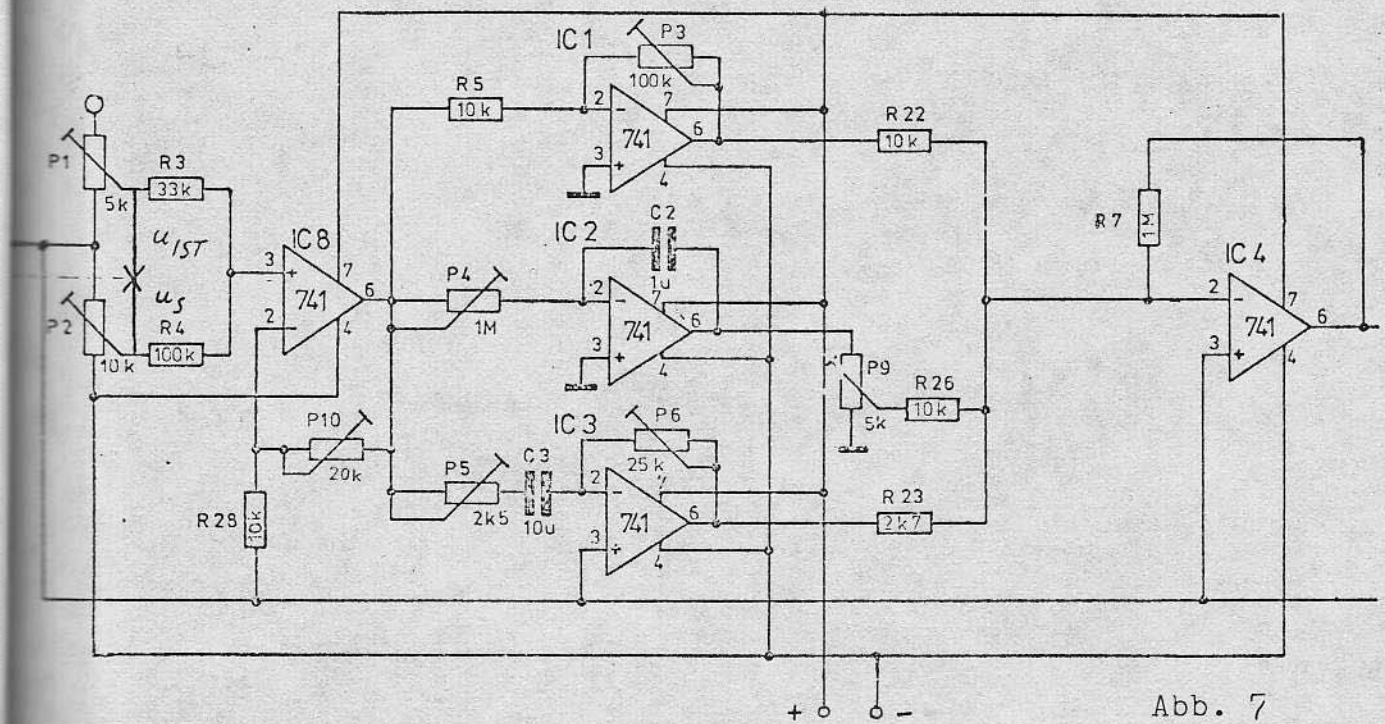
Demnach kann in einem Bereich von 20 mm die Kennlinie als linear mit einer Steigung von $133 \frac{\text{mV}}{\text{mm}}$ angenommen werden, d.h.

$$G_{\text{LS}}(p) = K_{\text{LS}} = 133 \frac{\text{mV}}{\text{mm}} ; \quad 0 \leq x \leq 20 \text{ mm} \quad (5)$$

Es wurde in diesem Falle ein optisches Meßsystem verwendet, da es aufgrund seines einfachen Aufbaus besonders anschaulich und leicht zu erfassen ist. Der Strahlengang muß allerdings stets freigehalten werden, da der nachgeschaltete Regler auf kleine Störungen heftig reagieren kann. Während des Betriebs tritt mitunter eine leichte Störwelligkeit auf, was auf den äußeren Lichteinfluß der Raumbeleuchtung zurückzuführen ist.

1.2.2 Regler

Die Schaltung wurde aus der Bauanleitung einer Zeitschrift entwickelt [1]. Sie wies ursprünglich unbefriedigende Regleigenschaften sowie starke Kopplungen zwischen Ein- und Ausgangsgrößen auf. Zudem war keine getrennte Einstellung des P-, I- und D-Anteils möglich. Zu diesem Zweck wurde eine Parallelschaltung von gegengekoppelten Operationsverstärkern mit hohen Eingangswiderständen und entsprechendem Ausgangsverstärker vorgesehen.

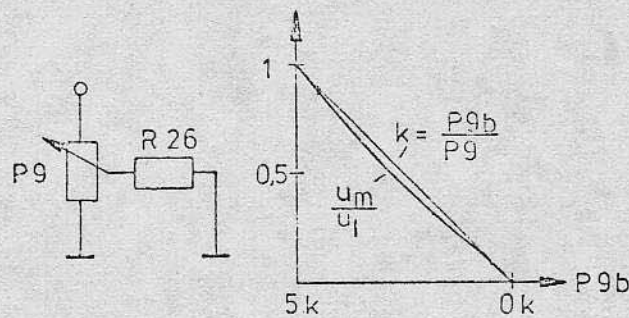


Die Übertragungsfunktion des P-Anteils lautet nach Abb. 7

$$G_P(p) = - \frac{P_3}{R_5} \frac{R_7}{R_{22}} \cdot$$

Mit $P_a = k \cdot P_9$ und $P_b = (1 - k)P_9$ wird der I-Anteil zu

$$G_I(p) = - \frac{1}{P_4 C_2 p} \frac{k}{1 + k(1 - k) \frac{P_9}{R_{26}}} \frac{R_7}{R_{26}}$$



Nach Abb. 8 kann

$$G_I(p) = - \frac{\frac{P_a}{P_9}}{P_4 C_2 p} \frac{R_7}{R_{26}}$$

geschrieben werden .

Der D-Anteil ergibt sich zu

$$G_D(p) = - \frac{P_6 C_3 p}{1 + C_3 P_5 p} \frac{R_7}{R_{23}} \cdot$$

Zur Entkopplung verfügt der PID-Regler über einen Eingangstrennverstärker mit

$$G_{Tr} = 2.055 \quad (P_{10} = 10550\Omega) .$$

Die Übertragungsfunktion der Istwerteingabe folgt nach Abb. 7 unter Annahme eines unendlich hohen Eingangswiderstandes des Trennverstärkers nach längerer Rechnung aus

$$u_{IST} = \frac{u_{FT}(1 - k_1)R_4}{R_3 + R_4} \quad \text{mit} \quad k_1 = \frac{P_{1a}}{P_1} .$$

Bei der gewählten Einstellung liegt eine Verstärkung von

$$G_{IST} = \frac{U_{IST}}{U_{FT}} = K_{IST} = 0.75 \quad \text{vor} .$$

Dabei wurde $R_3, R_4 \gg P_1$ angenommen und ein nichtlineares Verhalten der Sollwerteingabe in Kauf genommen .

Da der Regler auch als reiner PD-Regler Verwendung finden soll , wird die Schaltung nach Abb. 8 verwendet . Die daraus resultierende leichte Krümmung der Kennlinie wurde wegen des geringen Aufwandes hingenommen .

Damit lautet die Übertragungsfunktion

$$\begin{aligned} G_R &= - G_{Tr} \left(K_P + \frac{K_I}{p} + \frac{K_D}{1 + T_D p} p \right) \\ &= - G_{Tr} \left(\frac{K_R(1 + T_{R1}p)(1 + T_{R1}p)}{p(1 + T_D p)} \right) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\text{mit} \quad K_P = 0 \div 1000$$

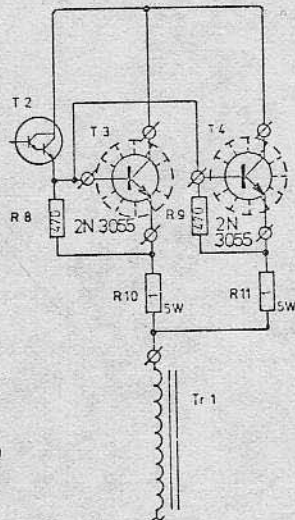
$$K_I = 0 \div 100 \text{ s}^{-1}$$

$$K_D = 0 \div 100 \text{ s}$$

$$T_D = 12.5 \text{ ms}$$

1.2.3 Steuerung der magnetischen Feldstärke

Der Spannungs-Stromwandler soll möglichst verzögerungsfrei die vom Regler aufgegebene Spannung u_S in den Regelstrom i umsetzen :



Um einen möglichst großen Strom zu ermöglichen, werden zwei Leistungs-transistoren von einem Darlington-Transistor getrieben, den der Regler ansteuert. Da an den Transistoren Spannungsabfälle von ungefähr 0.7 V je Stufe auftreten, ergibt sich folgende Gleichung :

Abb. 9

$$i = \frac{u_S - 2.1V}{R + L_p} = \frac{u_S}{R + L_p} - \frac{2.1V}{R + L_p} = \frac{u_S}{R + L_p} - I_{\text{konst.}}$$

$I_{\text{konst.}}$ wird durch die Rückführung ausgeregelt, so daß gilt :

$$i = \frac{u_S}{R + L_p},$$

woraus die Übertragungsfunktion mit

$$G_I = \frac{i}{u_S} = \frac{1}{R + L_p} = \frac{\frac{1}{R}}{1 + \frac{L_p}{R}} = \frac{K}{1 + T_p} \quad \text{und} \quad K = 0.182 \Omega^{-1}$$

folgt .

Zur Überprüfung der auftretenden Gegeninduktivität durch Annähern des Ankers an den Magneten wurde die Sprungantwort dieses Teilsystems gemessen, woraus sich mit $L = RT$ für $3 \text{ mm} \leq x \leq \infty$ Induktivitäten von $L = 1.61 \div 1.67 \text{ H}$ ergaben. Daraus folgt keine beachtliche Abhängigkeit vom Abstand, so daß $L = \text{const} = 1.64 \text{ H}$ angenommen werden darf, wodurch eine Rückwirkung bezüglich des Spannungs-Stromkonverters ausgeschlossen wird. Diese Konstante bewirkt jedoch ein starkes Verzögerungsverhalten des Wandlers mit einer Zeitkonstanten von

$$T = \frac{L}{R} = \frac{1.64 \text{ H}}{5.5} = 300 \text{ ms}.$$

Deshalb wird eine Kaskadenregelung vorgesehen, die die Verzögerung vermindert.

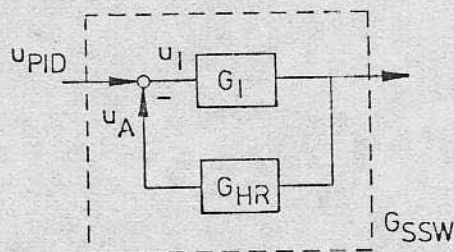


Abb. 10

Der Hilfsregler ist als P-Regler ausgelegt und liefert die mas-
sebezogene, dem Strom i proportionale Spannung u_A . Um eine
direkte Beeinflussung der Rückführung zu ermöglichen, wurde
der Regler im Rückwärtszweig vorgesehen. Seine Übertragungs-
funktion lautet

$$G_{HR}(p) = K_{HR} = 200 \Omega$$

Somit besitzt der dermaßen realisierte Hilfsregelkreis eine
Zeitkonstante von nur 3 ms :

$$G_{SSW}(p) = \frac{G_I}{1 + G_I G_{HR}} = \frac{\frac{K}{1 + T_p p}}{1 + \frac{K}{1 + T_p p} G_{HR}} = \frac{K}{1 + K G_{HR} + T_p p}$$

$$= \frac{\frac{K}{1 + K G_{HR}}}{1 + \frac{T}{1 + K G_{HR}} p} = \frac{K_W}{1 + T_V p} \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} K_W &= 0.0049 \Omega^{-1} \\ T_V &= 8 \text{ ms} \end{aligned} \quad (7)$$

1.3 Blockschaltbild des Regelkreises

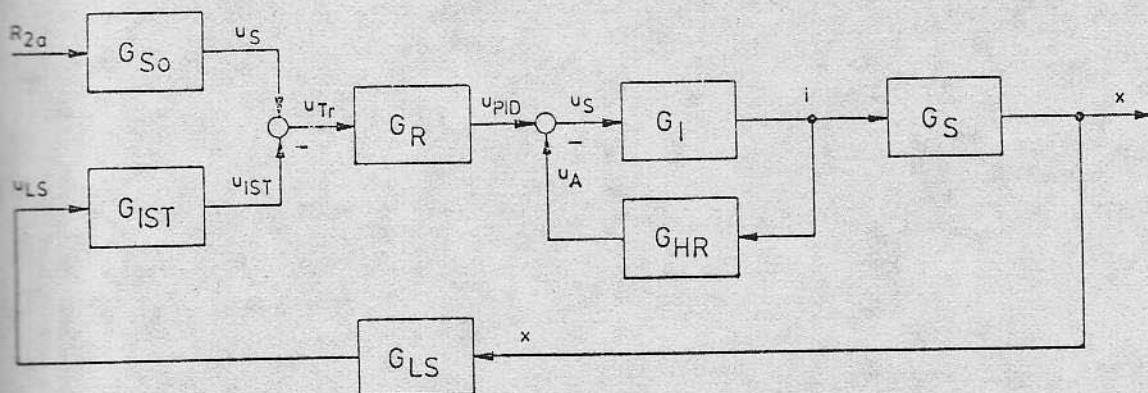


Abb. 11

1.4 Übertragungsfunktion des offenen Kreises

Aus 1.3 folgt für den offenen Kreis

$$G_o(p) = G_R \frac{G_I}{1 + G_I G_{HR}} G_{STR} G_{LS} G_{IST}$$

und

$$G_o(p) = G_R \frac{K_W}{1 + T_V p} \frac{K_S}{(1 + T_p)(1 - T_p)} K_{LS} K_{IST} .$$

Mit (6) erhält man

$$G_o(p) = - K_S K_R \frac{K}{(1 + T_p)(1 - T_p)(1 + T_V p)} \frac{(1 + T_{R1} p)(1 + T_{R2} p)}{p(1 + T_D p)}$$

$$\text{mit } K = K_W K_{LS} K_{IST} . \quad (8)$$

Hiermit wird die Behandlung des Regelkreises und die Auslegung des Reglers anhand des WOK-Verfahrens möglich .

2. Reglerentwurf

Im Praktikum soll die Simulation und Regelung des unter 1. analysierten instabilen, nichtlinearen Systems am Analogrechner durchgeführt werden. Bisher wurde dazu ein PD-Regler verwendet, jedoch wäre, um stationäre Genauigkeit zu erreichen, ein PID-Regler wünschenswert. Mögliche Regler höherer Ordnung wurden nicht in Betracht gezogen, da der Versuch nicht zu kompliziert werden durfte und die Vorbereitungszeit einen Nachmittag nicht überschreiten sollte.

In der Versuchsanleitung werden zunächst theoretische Kenntnisse über das Stabilitätskriterium von Hurwitz und das Wurzelortungsverfahren vermittelt und anhand eines auf das vorliegende System abgestimmten Beispiels demonstriert. Dies soll in der Versuchsvorbereitung nachvollzogen und am Beispiel einer Nullstellenverlegung durchgeführt werden. Dabei soll der Einfluß der Nullstellen auf den Verlauf der WOK aufgezeigt werden [3].

2.1 Stabilitätsuntersuchung anhand des Hurwitz-Kriteriums

Am Beispiel der folgenden Stabilitätsuntersuchung wird im Praktikum die Möglichkeit aufgewiesen, mittels der aus der Systemanalyse gewonnenen Übertragungsfunktion des offenen Kreises Stabilitätsbedingungen für den geschlossenen Kreis zu erhalten.

Die charakteristische Gleichung des geschlossenen Kreises lautet mit (8) und Gleichung (9) der Versuchsanleitung:

$$G_o(p) + 1 = \frac{-K_R K_S (1 + T_{R1}p)(1 + T_{R2}p)}{p(1 + T_Dp)(1 + T_p)(1 - T_p)(1 + T_vp)} + 1 = 0 ;$$

$$T > T_D > T_v .$$

Es liegt ein System 5. Ordnung vor. Da die Kompensation der größten Zeitkonstante ratsam erscheint, erhält man mit $T_{R1}=T$ ein System 4. Ordnung:

$$G_o(p) + 1 = \frac{-K_R K_S (1 + T_{R2}p)}{p(1 + T_Dp)(1 + T_vp)(1 - T_p)} + 1 = 0$$

oder

$$\underbrace{T T_D T_V p^4}_{a_4} + \underbrace{(T T_V + T_D T - T_D T_V) p^3}_{a_3} + \underbrace{(T - T_V - T_D) p^2}_{a_2} + \underbrace{(K_S K_R T_{R2} - 1) p}_{a_1} + \underbrace{K_S K_R}_{a_0} = 0 \quad (9)$$

Das Hurwitz-Kriterium für $n = 4$ lautet

$$a_i > 0 \quad (10)$$

$$a_4 a_1^2 + a_0 a_3^2 - a_1 a_2 a_3 < 0 \quad (11)$$

Aus (10) folgt, daß

$$K_S K_R > 0$$

und $K_R > \frac{1}{K_S T_{R2}}$ sein muß.

Aus (11) folgt:

$$\underbrace{K_R^2 a_4 K_S^2 T_{R2}^2}_A + \underbrace{K_R (K_S a_3^2 - T_{R2} a_2 a_3 K_S - 2 a_4 K_S T_{R2})}_B + \underbrace{a_4 + a_2 a_3}_C < 0 \quad (12)$$

Damit K_R reell bleibt, muß gelten: $B^2 - 4AC > 0$, woraus sich ein Zeitbereich $T_{R2} > T_{R2, \text{krit.}}$ ergibt, für den K_R reell ist.

Wählt man daraus ein T_{R2} , so erhält man aus (12) die kritischen $K_R \text{ min, max}$.

Beispiel

$$\left. \begin{aligned} m &= 108.7 \text{ g} \\ x_S &\stackrel{!}{=} \frac{3}{2} 9.81 \text{ mm} = 14.72 \text{ mm} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} K_S &= 0.009577 \frac{\text{m}}{\text{A}} \\ T &= 27.4 \text{ ms} \end{aligned}$$

$$T_V = 27.4 \text{ ms}$$

$$T_D = 8 \text{ ms}$$

$$K_{IS} K_{IST} = 1 \frac{\text{mA}}{\text{mm}}$$

$$G_O(p) = \frac{-0.009577 \frac{\text{m}}{\text{A}} \frac{\text{mA}}{\text{mm}} K_R (1 + T_{R2} p)}{(1 - 27.4 \text{ msp})(1 + 8 \text{ msp})(1 + 12.5 \text{ msp}) p}$$

$$G_o(p) = \frac{-3495 K_R T_{R2} \left(\frac{1}{T_{R2}} + p \right) s^{-3}}{(36.5s^{-1} - p)(125s^{-1} + p)(80s^{-1} + p)p}$$

$$a_4 = 2740 \text{ ms}^3 \quad \left| \quad A = 0.251 \text{ ms}^3 \frac{\text{m}^2}{\text{A}^2} T_{R2}^2 \right.$$

$$a_3 = 462 \text{ ms}^2 \quad \left| \quad B = 2041 \frac{\text{m}}{\text{A}} \text{ ms}^4 - 83 \frac{\text{m}}{\text{A}} \text{ ms}^3 T_{R2} \right.$$

$$a_2 = 6.9 \text{ ms} \quad \left| \quad C = 5926 \text{ ms}^3 \right.$$

$$B^2 - 4AC > 0 :$$

$$981 \text{ ms}^6 T_{R2}^2 - 3.388 \cdot 10^5 \text{ ms}^7 T_{R2} + 4.167 \cdot 10^5 \text{ ms}^8 > 0$$

$$T_{R2a} = 362.8 \text{ ms}$$

$$T_{R2b} = 1.23 \text{ ms} \quad , \text{ d.h. } T_{R2} \stackrel{!}{>} T_{R2a}$$

Gewählt wird $T_{R2} = 1 \text{ s}$.

Daraus folgt für $K_R \text{ min,max}$:

$$A = 251 \cdot 300 \frac{\text{m}^2}{\text{A}^2} \text{ ms}^5$$

$$B = -80 \cdot 949 \frac{\text{m}}{\text{A}} \text{ ms}^4$$

$$C = 5 \cdot 926 \text{ ms}^3$$

$$K_R \text{ min} = 112.48 \frac{\text{A}}{\text{m}} \text{ s}^{-1}$$

$$K_R \text{ max} = 209.6 \frac{\text{A}}{\text{m}} \text{ s}^{-1}$$

Für $p = j\omega$ lassen sich nun mit Hilfe eines Koeffizientenvergleichs aus (9) die kritischen Kreisfrequenzen bestimmen.

$$-a_3 \omega^2 + a_1 = 0$$

$$\omega_{1/2} = \pm \sqrt{\frac{a_1}{a_3}}$$

$$a_1 = K_S K_R T_{R2} - 1 ;$$

$$a_1 \text{ min} = 0.0772$$

$$a_1 \text{ max} = 1.007$$

$$\omega_1 \text{ min} = \pm 12.9 \text{ s}^{-1}$$

$$\omega_1 \text{ max} = \pm 46.7 \text{ s}^{-1} .$$

2.2 Zeichnen der Wurzelortskurve

Das Aufzeichnen der WOK von Abb. 12 für

$$G_o(p) = \frac{-3495 \cdot K_R (1s^{-1} + p) s^{-2}}{(36.5s^{-1} - p)(125s^{-1} + p)(80s^{-1} + p)p} ;$$

$$k = 3495 K_R$$

erfolgt in der Versuchsanleitung in einzelnen Schritten mit Hilfe der Regeln eines Anhangs . Hier wurde der Verlauf der Wurzelortskurve in den folgenden Darstellungen anhand des WOK-Berechnungsprogramms "Root Locus V" von Raymond H. Ash berechnet und geplottet .

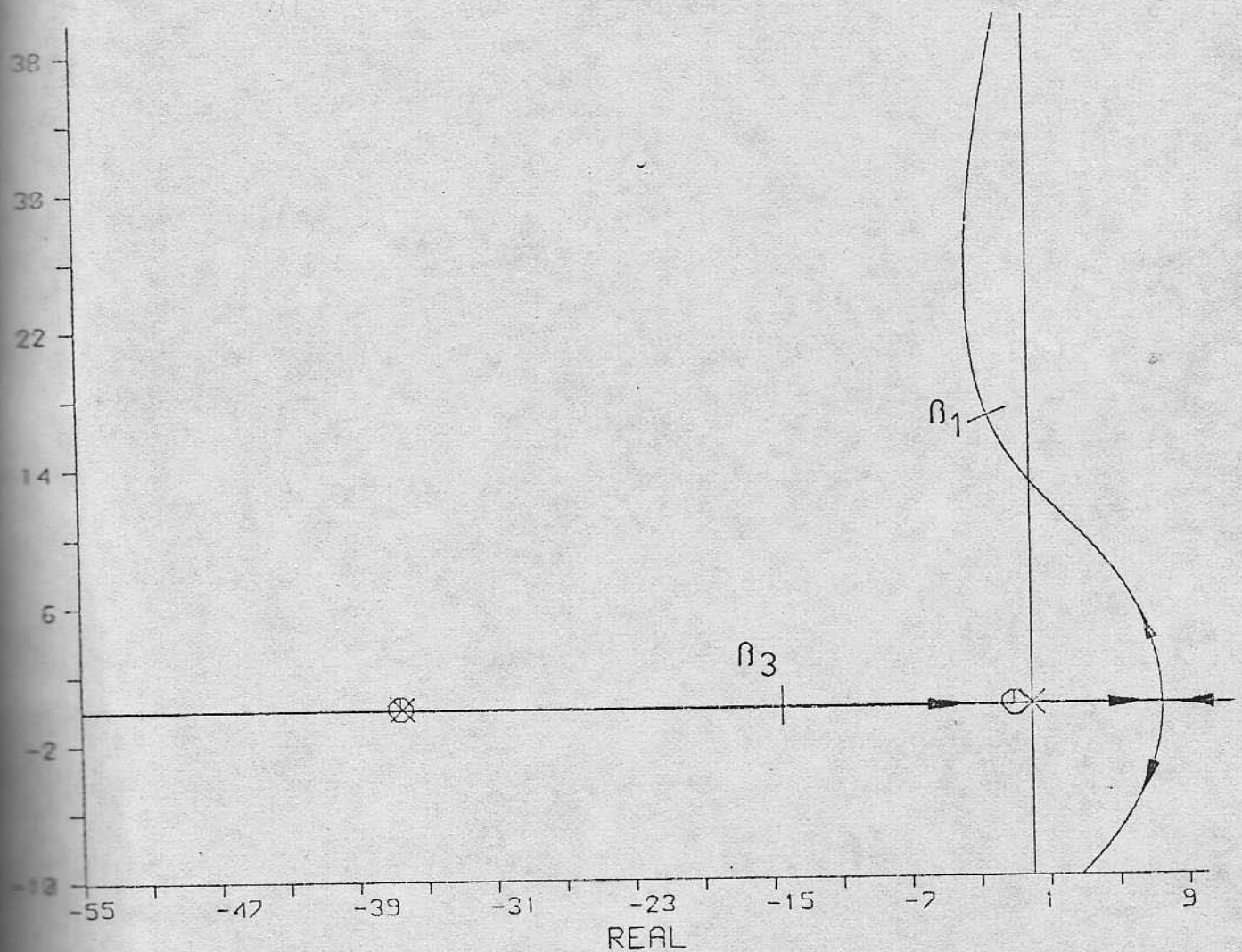


Abb.12

2.3 Wurzelortskurven-Diskussion

Um dem Praktikumsteilnehmer einen Einblick in die Möglichkeiten eines Reglerentwurfs anhand des WOK-Verfahrens zu ermöglichen, wird eine WOK-Diskussion durchgeführt, die im folgenden erläutert werden soll.

Mit Hilfe des WOK-Programms läßt sich die Verstärkung an jeder beliebigen Stelle der WOK berechnen, was später in Verbindung mit der Simulation des Systems auf dem Analogrechner zur schnellen Ermittlung der kritischen Reglerparameter führt.

Anhand der Reglerverstärkung läßt sich nun das Verhalten der geregelten Strecke diskutieren. Das Bestreben liegt darin, sie möglichst schnell und stabil zu machen, d.h. zwei dominante Pole auf der Winkelhalbierenden mit großem Abstand zur imaginären Achse wären ideal. Betrachtet man hierzu die nötige Verstärkung, so erhält man jedoch einen zusätzlichen Pol auf der reellen Achse, der von -80 s^{-1} gegen den Ursprung strebt. Wird aber die Verstärkung verringert, so rücken die dominanten Pole zu nahe an die imaginäre Achse.

Durch weiteres Annähern der ursprungnahen Nullstelle läßt sich ein Verschieben der WOK-Äste nach links (Abb.13/14) erreichen, jedoch vermindert dies den I-Anteil der geregelten Strecke. Dieses Verhalten kann man umgehen, indem man auf eine Kompensation verzichtet und beide Nullstellen gegen den Ursprung schiebt (Abb.15/16). Die WOK-Äste wandern stärker nach links, jedoch rückt weiterhin ein Pol gegen den Ursprung. Damit nur dieser Pol maßgebend wird, können die WOK-Äste soweit nach links verschoben werden, bis der Regelkreis bei entsprechender Verstärkung nahezu reines VZ1-Verhalten aufweist (Abb.17 + 19).

Da das WOK-Programm einen beschränkten Darstellungsbereich besitzt, wurden in Abb.19/20 durch Umnormierung im Verhältnis 1 : 10 Gesamtdarstellungen der WOK ermöglicht.

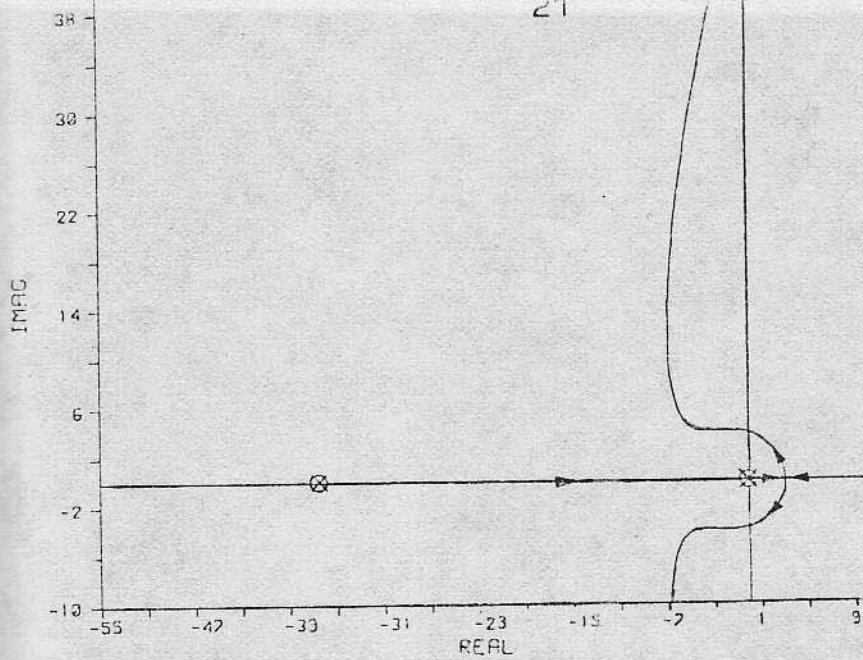


Abb.13

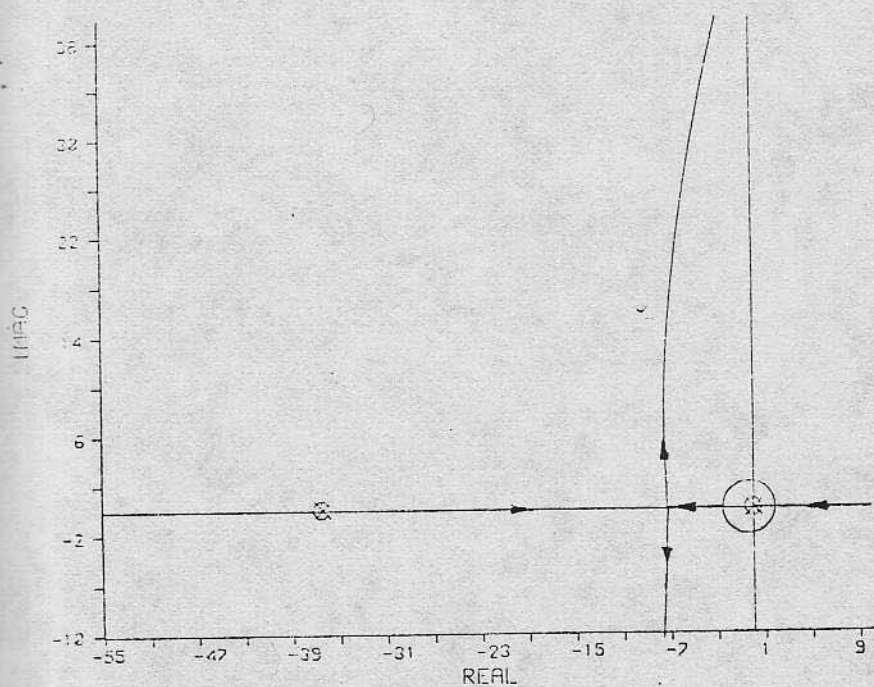


Abb.14

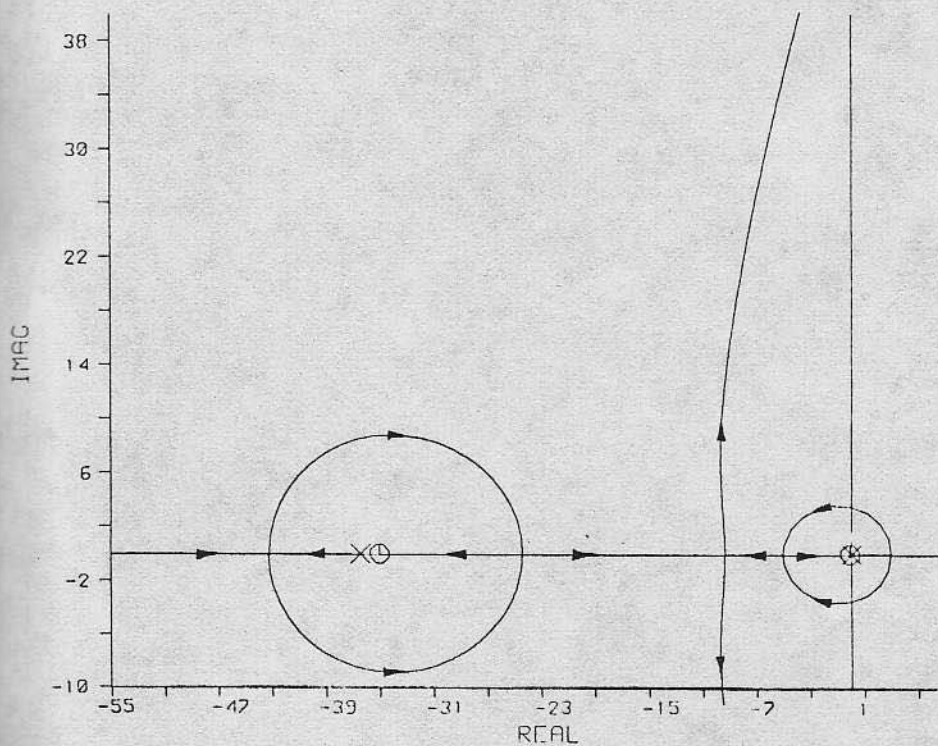


Abb.15

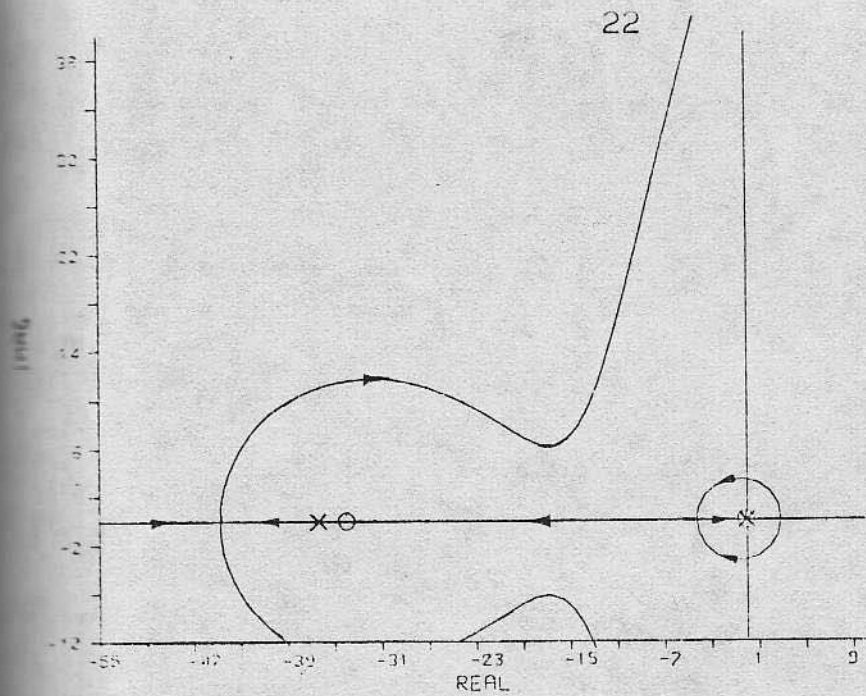


Abb.16

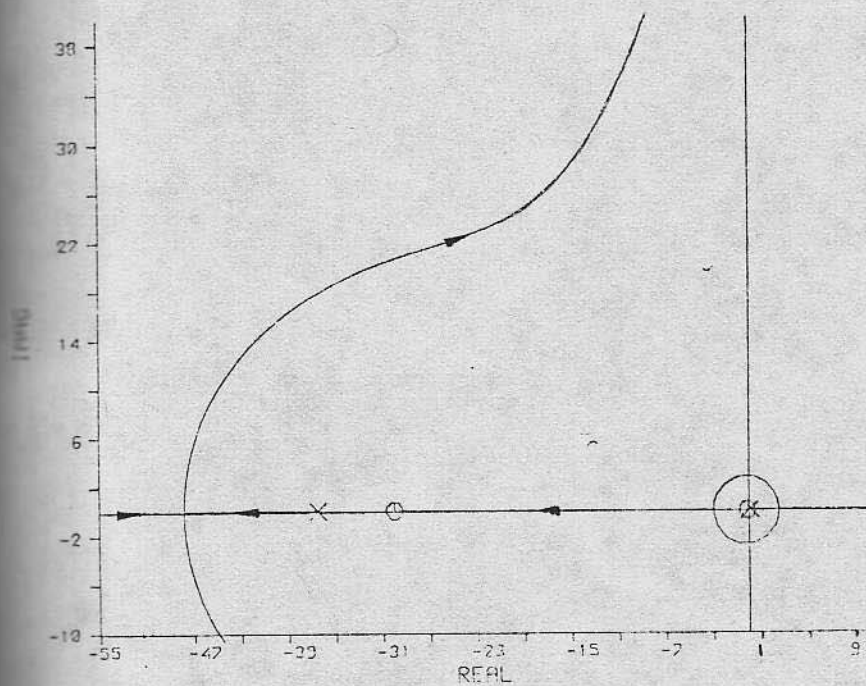


Abb.17

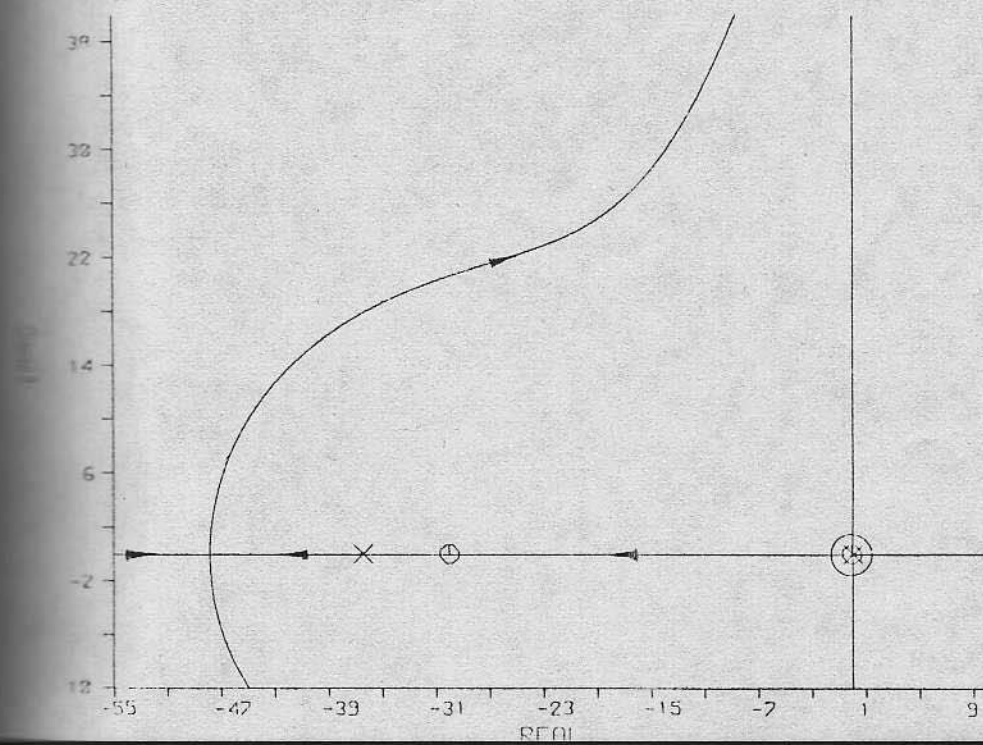


Abb.18

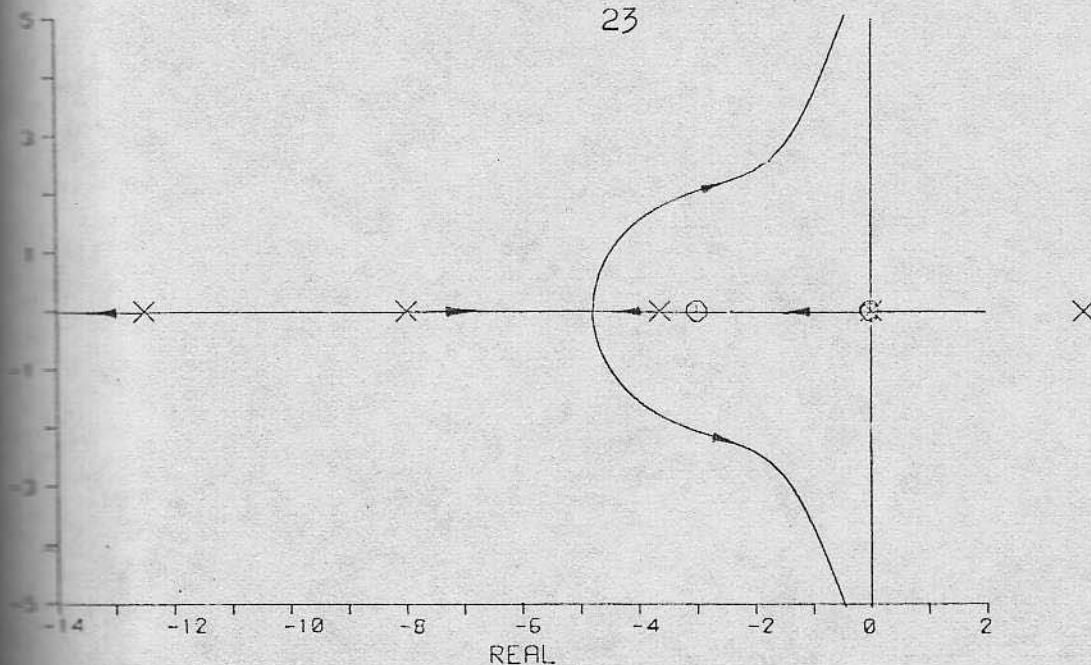


Abb.19

Verwendet man statt des PID-Reglers einen PD-Regler so erhält man folgende Ergebnisse :

$$G_O(p) = \frac{-K_S K_R (1 + T_R p)}{(1 + T_p)(1 - T_p)(1 + T_v p)(1 + T_D p)}$$

$$T_R = T :$$

$$G_O(p) + 1 = \frac{-K_S K_R}{(1 - T_p)(1 + T_v p)(1 + T_D p)} + 1 = 0$$

oder

$$K_S K_R - 1 + (T - T_v - T_D)p + (T_v T + T_D T - T_v T_D)p^2 + T_v T_D T p^3 = 0$$

$$\text{Hurwitz : } a_1 > 0 \quad ; \text{ für } T > T_D > T_v \text{ erfüllt ; } K_R > \frac{1}{K_S} = 104.42 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

$$a_0 a_3 - a_1 a_2 < 0 ; \text{ ergibt :}$$

$$K_R < \frac{T_v T_D T + (T - T_v - T_D)(T_v T + T_D T - T_v T_D)}{K_S T_v T_D T}$$

mit den o.g. Werten folgt :

$$G_O(p) = \frac{-3495 K_R}{(36.5s^{-1} - p)(125s^{-1} + p)(80s^{-1} + p)} ,$$

$$\text{mit } K_R < 222.95 \frac{\text{A}}{\text{m}} .$$

Damit läßt sich die WOK nach Abb. 20 aufzeichnen .

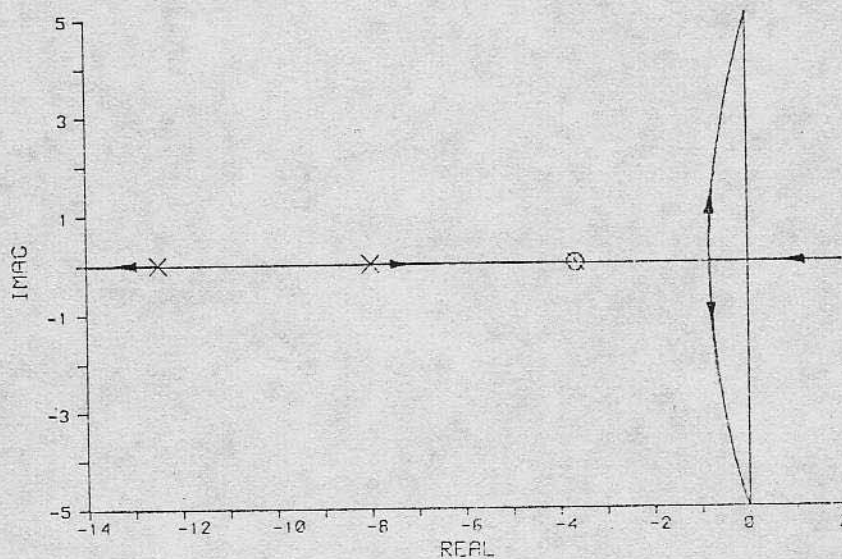


Abb.20

Durch Verschieben der Reglernullstelle gegen den Ursprung wandern die WOK-Äste nach links und springen schließlich auf die linke Seite der Nullstelle (Abb.21 + 23) .

Nun kann bei entsprechender Verstärkung der von P_1 nach P_2 wandernde Pol als dominant betrachtet werden , wobei VZ1-Verhalten vorliegt (Abb.23) .

Abb.24 gibt den Verlauf der WOK bei kleiner werdendem P_2 an .

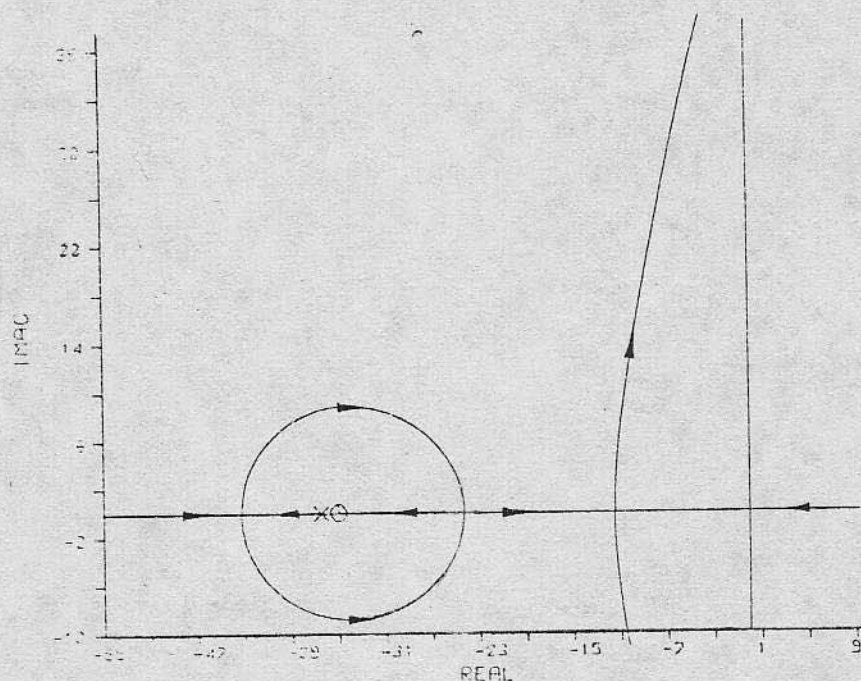


Abb.21

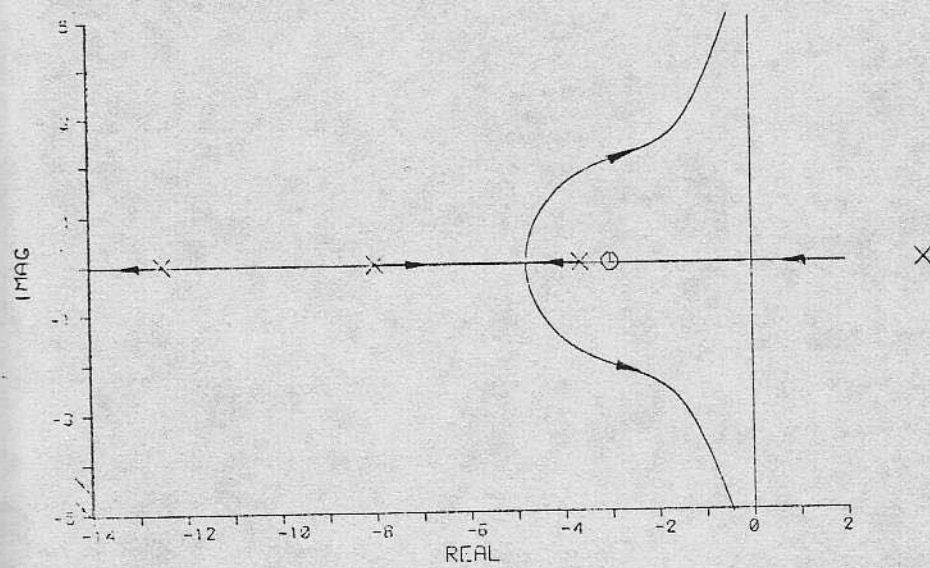


Abb.22

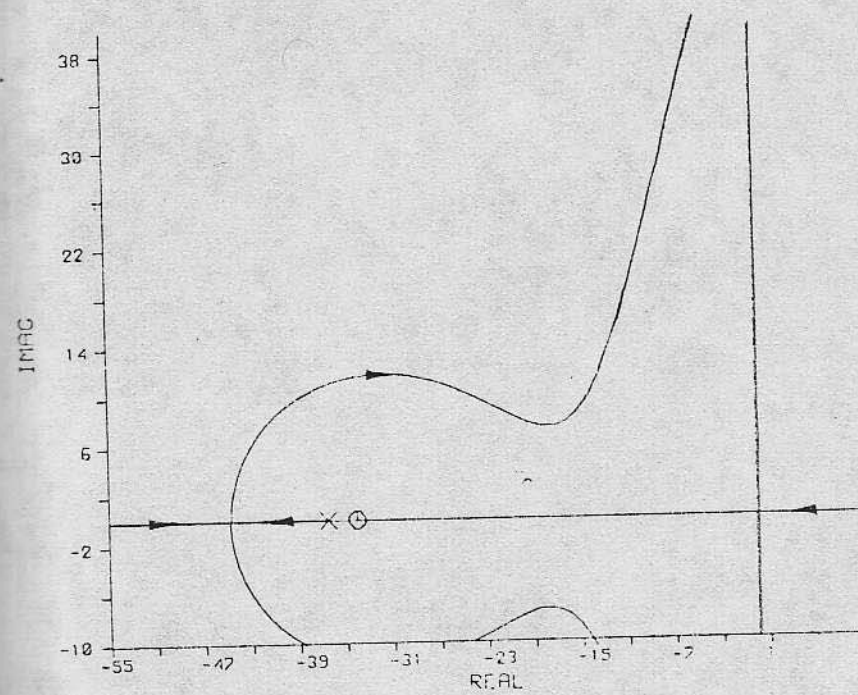


Abb.23

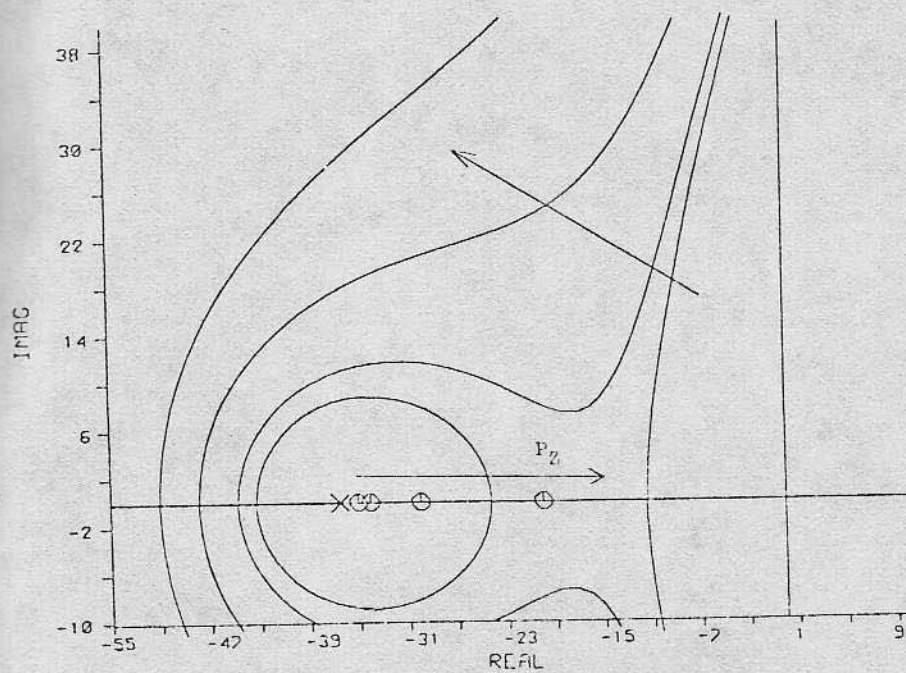


Abb.24

2.4 Einstellmöglichkeiten an der Versuchseinrichtung

Die Versuchseinrichtung verfügt über eine Sollwert- sowie getrennte P-, I- und D-Anteil-Eingaben. Diese ermöglichen einen direkten Einblick in die Funktionsweise eines PID-Reglers, da die Auswirkungen einer Parameteränderung sofort am Verhalten der Strecke zu verfolgen ist.

2.4.1 PID-Regler

Mit Hilfe der folgenden Umformungen wird eine einfache Bestimmung der Reglerparameter möglich.

Es gilt

$$\begin{aligned} K_P &= K_R(T_{R1} + T_{R2}) - K_I T_D \\ K_I &= K_R \\ K_D &= K_R T_{R1} T_{R2} - K_P T_D \end{aligned} \quad (13)$$

und umgekehrt

$$T_{R1/2} = \frac{K_P + K_I T_D}{2K_I} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{K_P + K_I T_D}{K_R}\right)^2 - 4\left(\frac{K_D + K_P T_D}{K_R}\right)}$$

$$K_R = K_I$$

2.4.2 PD-Regler

Bei Verwendung als PD-Regler wird $K_I = 0$ und die Übertragungsfunktion

$$\begin{aligned} G_R(p) &= -G_{Tr} \left(K_P + \frac{K_D p}{1 + T_D p} \right) & K_P &= 0 + 1000 \\ &= -G_{Tr} \left(\frac{K_R(1 + T_R p)}{1 + T_D p} \right) & K_D &= 0 + 100 \text{ s} \\ & & T_D &= 12.5 \text{ ms} \end{aligned}$$

Hier gilt

$$\begin{aligned} K_P &= K_R \\ K_D &= (T_R - T_D) K_P \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} T_R &= \frac{K_D}{K_P} + T_D \\ K_R &= K_P \end{aligned}$$

2.5 Parameterempfindlichkeit

Ein Vorteil des Analogrechnens liegt unter anderem in der einfach durchzuführenden Parameteränderung der Differentialgleichung eines Systems, was am Beispiel einer Wegänderung kurz erläutert werden soll.

Ändert man den Abstand des Ankers vom Magneten, so geht dies in die Bestimmung der Zeitkonstante der instabilen Strecke nach Gleichung (4) ein:

$$T = \sqrt{\frac{x_S}{2g}}$$

Bei bleibender Reglereinstellung führt dies zu einer Verschiebung der Pole und damit zu einer Veränderung des Verlaufs der Wurzelortskurve. Verwendet man eine Reglereinstellung nach Abb.17, so zieht eine Verkleinerung von x_S eine Verminderung von T und damit eine Verlagerung des negativen Pols nach sich. Dieser wandert vom Ursprung weg und bewirkt eine Verlegung der WOK in die gleiche Richtung (Abb.25).

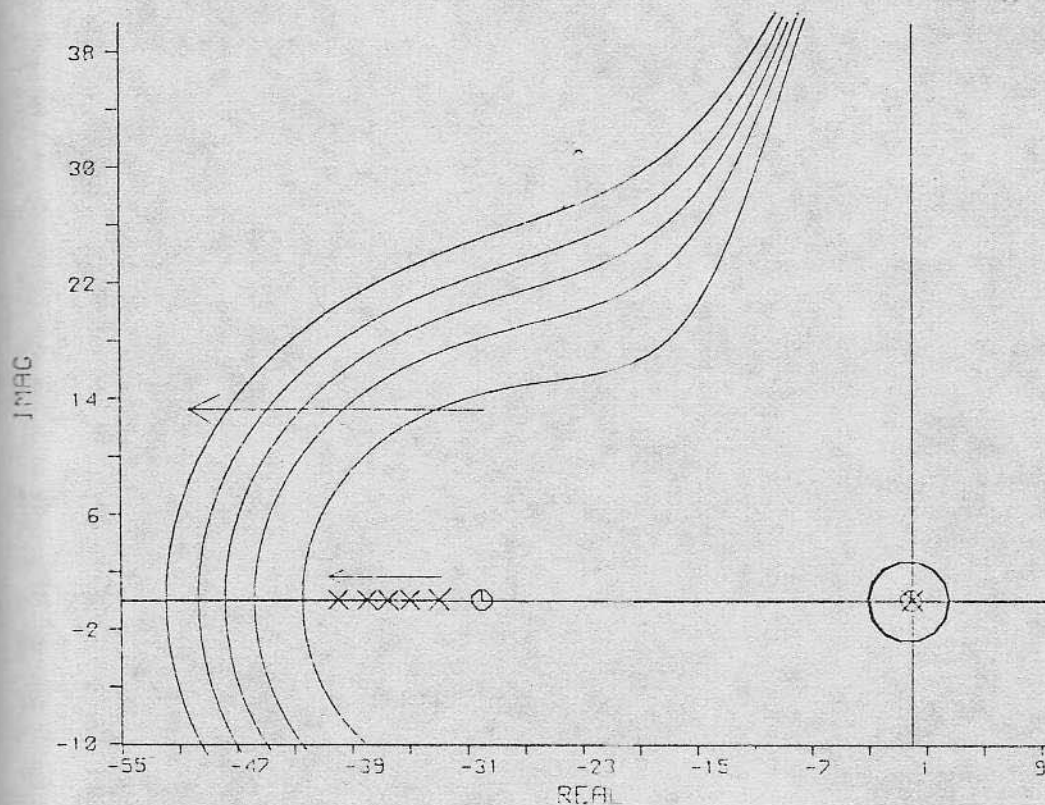


Abb.25

In Abb.26 ist zu erkennen, daß dies zu einer Stabilisierung des Systemverhaltens führt.

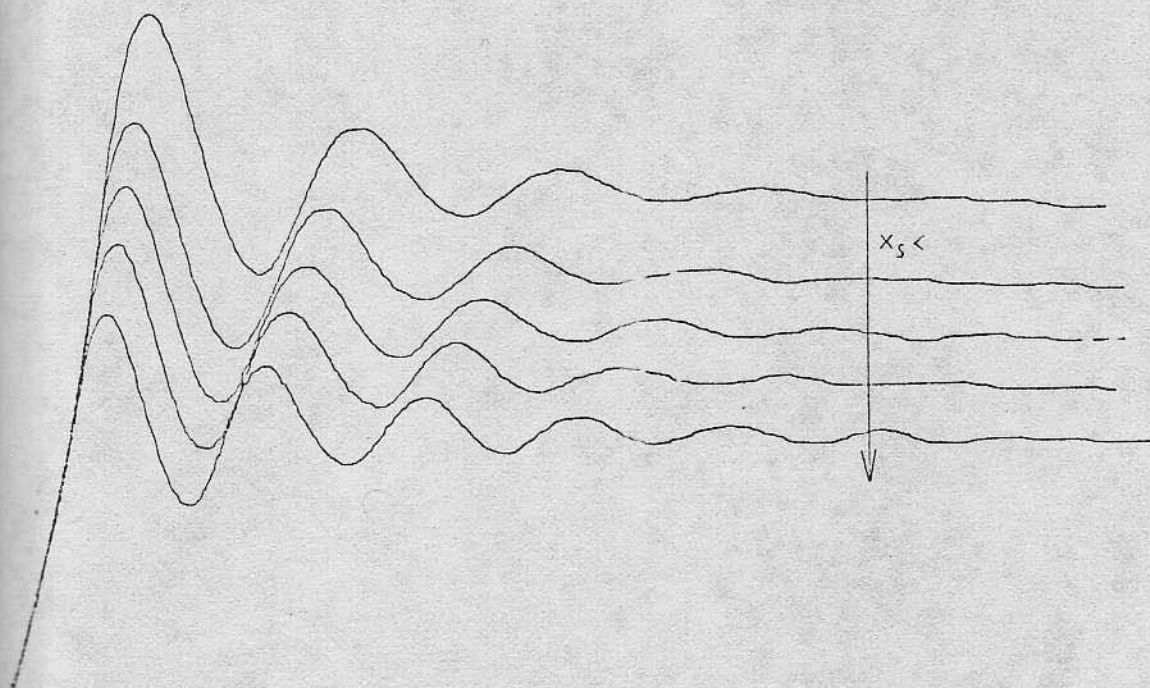


Abb.26

3. Simulation auf dem Analogrechner [6]

Versuch 9 des Regelungstechnischen Praktikums baut auf Versuch 8 auf, der die Grundlagen des Analogrechnens vermittelt. Ziel des Versuchs soll nun sein, die Anwendungsmöglichkeiten und Vorteile des Analogrechnens zu zeigen. Deshalb wird am Beispiel der magnetischen Aufhängung eine Simulation durchgeführt. Hierbei wird insbesondere auf die Möglichkeit der Simulation auch nichtlinearer Systeme und der Parameteränderung hingewiesen. Zur Demonstration der Wirklichkeitsnähe einer AR-Simulation soll schließlich die reale Strecke unter Verwendung des an der simulierten Strecke entworfenen Reglers geregelt werden.

3.1 Schaltungsentwurf

3.1.1 Strecke

Mit der Amplitudenskalierung

$$x(t) = A_2 x_2(t) \quad ; \quad A_2 = 200 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$x(t) = A_1 x_1(t) \quad ; \quad A_1 = 0.4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$x(t) = A_0 x_0(t) \quad ; \quad A_0 = 0.045 \text{ m}$$

$$i(t) = B \cdot i_0(t) \quad ; \quad B = 2A$$

kann Gleichung (2) angeschrieben werden :

$$m\ddot{x}(t) = mg - C \frac{i^2(t)}{x^2(t)}$$

Es wird

$$\ddot{x}(t) = g \left(1 - K_S^2 \frac{i^2(t)}{x^2(t)} \right)$$

und

$$A_2 x_2(t) = g \left(1 - K_S^2 \frac{B^2 i_0^2(t)}{A_0^2 x_0^2(t)} \right) .$$

Damit folgt schließlich

$$x_2(t) = \frac{g}{A_2} - \left(\frac{\sqrt{\frac{g}{A_2}} \frac{K_{SB}}{A_0} i_o(t)}{x_o(t)} \right)^2$$

Anhand dieser Gleichung kann die Schaltung (Abb.27) gezeichnet werden. Durch Koeffizientenvergleich mit

$$x_2(t) = \alpha_{04} c_1 - \left(\alpha_{11} c_{10} \frac{i_o(t)}{x_o(t)} \right)^2$$

werden die Potentiometerwerte

$$\alpha_{04} c_1 = \frac{g}{A_2} \quad ; \quad \alpha_{11} c_{10} = \sqrt{\frac{g}{A_2}} \frac{K_{SB}}{A_0}$$

und intern folgt mit $\lambda = 1$; $k = 500 \text{ s}^{-1}$

$$x_1(t) = \frac{A_2}{A_1} \int_0^t x_2(t) dt + x_{10}$$

; Anfangsbed.: x_{00} , x_{10}

$$x_o(t) = \frac{A_1}{A_o} \int_0^t x_1(t) dt + x_{00}$$

sowie $\alpha_{06}^{kc} = \frac{A_2}{A_1}$

$$\alpha_{07}^{kc} = \frac{A_1}{A_o}$$

3.1.2 Verzögerungsglied

Die Übertragungsfunktion des Spannungs-Strom-Wandlers lautete

$$G_{SSW} = \frac{K_W}{1 + T_{VP}} = \frac{I}{U_R} \quad ; \quad K_W = 0.0049 \text{ }^{-1} \text{ , } T_V = 8 \text{ ms} \quad .$$

Damit ergibt sich die zugehörige Differentialgleichung zu

$$\dot{i}(t) = \frac{K_W}{T_V} u_R(t) - \frac{1}{T_V} i(t) \quad .$$

Mit der Amplitudenskalierung

$$\dot{i}(t) = I_1 i_1(t) \quad ; \quad I_1 = 200 \frac{\text{A}}{\text{s}}$$

$$u_R(t) = U_{Ro} u_{Ro}(t) \quad ; \quad U_{Ro} = 1 \text{ V}$$

folgt die skalierte Gleichung

$$i_1(t) = \frac{K_W}{T_V} \frac{U_{Ro}}{I_1} u_{Ro}(t) - \frac{1}{T_V} \frac{B}{I_1} i_o(t) \quad .$$

Hiernach entsteht die Schaltung in Abb.27 .

Für die Potentiometer erhält man mit

$$\alpha_{05}^{ck} = \frac{K_W}{T_V} \frac{U_{Ro}}{I_1} \frac{I_1}{I_o} \quad \alpha_{05} = 0.0613 \cdot 10^{-2}$$

$$c = 1 \quad .$$

Da der reale SSW eine Eingangsverstärkung von $V = 100$ besitzt , wird diese auch hier vorgesehen und

$$\alpha_{05} = 0.0613$$

$$c = 1$$

Ferner wird

$$\alpha_{08}^{ck} = \frac{1}{T_V} \frac{I_o}{I_1} \frac{I_1}{I_o} \quad \text{und damit} \quad \alpha_{08} = 0.25$$

$$c = 1$$

3.1.3 Lichtschrankensystem , Soll-Istwertvergleich , Trennverstärker

Diese drei Teilsysteme weisen P-Verhalten auf und können daher zusammengefaßt mit Hilfe zweier Potentiometer α_{14} , α_{15} (Abb.27) und eines Addierers simuliert werden .

3.1.4 Regler

Es wird ein PID-Regler nach Schaltbild 27 vorgesehen .

Man erhält $G_P(p) = 1$

und $G_I(p) = \frac{\alpha_{02}^k}{p} \quad .$

$G_D(p)$ folgt aus

$$U_{Tr}(p) + \alpha_{10} U_R(p) - \frac{10 \cdot \alpha_{09}^k}{p} U_R(p) = U_R(p)$$

Dies ergibt

$$G_D(p) = \frac{U_R(p)}{U_{Tr}(p)} = \frac{1}{1 - \alpha_{10} + \frac{10\alpha_{09}^k}{p}} = \frac{p}{10\alpha_{09}^k + (1 - \alpha_{10})p}$$

$$G_D(p) = \frac{\frac{p}{10\alpha_{09}k}}{1 + \frac{1 - \alpha_{10}}{10\alpha_{09}k} p}$$

und schließlich wird aus

$$- U_{Tr}(p) (G_P(p) + G_I(p) + 10\alpha_{03}G_D(p)) \alpha_{01} = U_{PID}(p)$$

die Übertragungsfunktion des Reglers

$$\begin{aligned} G_R(p) &= \frac{U_{PID}(p)}{U_{Tr}(p)} = - \left(\alpha_{01} + \frac{\alpha_{01}\alpha_{02}k}{p} + \frac{\frac{\alpha_{01}\alpha_{03}}{k} \frac{\alpha_{09}}{1 - \alpha_{10}}}{1 + \frac{1 - \alpha_{10}}{10\alpha_{09}k} p} p \right) \\ &= - \left(K_P + \frac{K_I}{p} + \frac{K_D p}{1 + T_D p} \right) . \end{aligned}$$

Potentiometereinstellung :

Der Regler wird später mit einer Verstärkung von $Vc_{aus} = 1000$ versehen , so daß die Potentiometer folgendermaßen eingestellt werden :

$$\begin{aligned} K_P : \alpha_{01} Vc_{aus} &= K_P ; \quad \alpha_{01} = \frac{K_P}{Vc_{aus}} \\ K_I : \alpha_{02} k Vc_{aus} &= K_I ; \quad \alpha_{02} = \frac{K_I}{\alpha_{01} k Vc_{aus}} \\ K_D : \frac{\alpha_{01}\alpha_{03} Vc_{aus}}{\alpha_{09}k} &= K_D ; \quad \alpha_{03} = \frac{K_D \alpha_{09}k}{\alpha_{01} Vc_{aus}} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\alpha_{09} = 0.01 \text{ gewählt}$$

$$T_D : \frac{1 - \alpha_{10}}{10\alpha_{09}k} = T_D = 12.5 \text{ ms} ; \quad \alpha_{10} = 0.38$$

3.15 AR-Schaltung

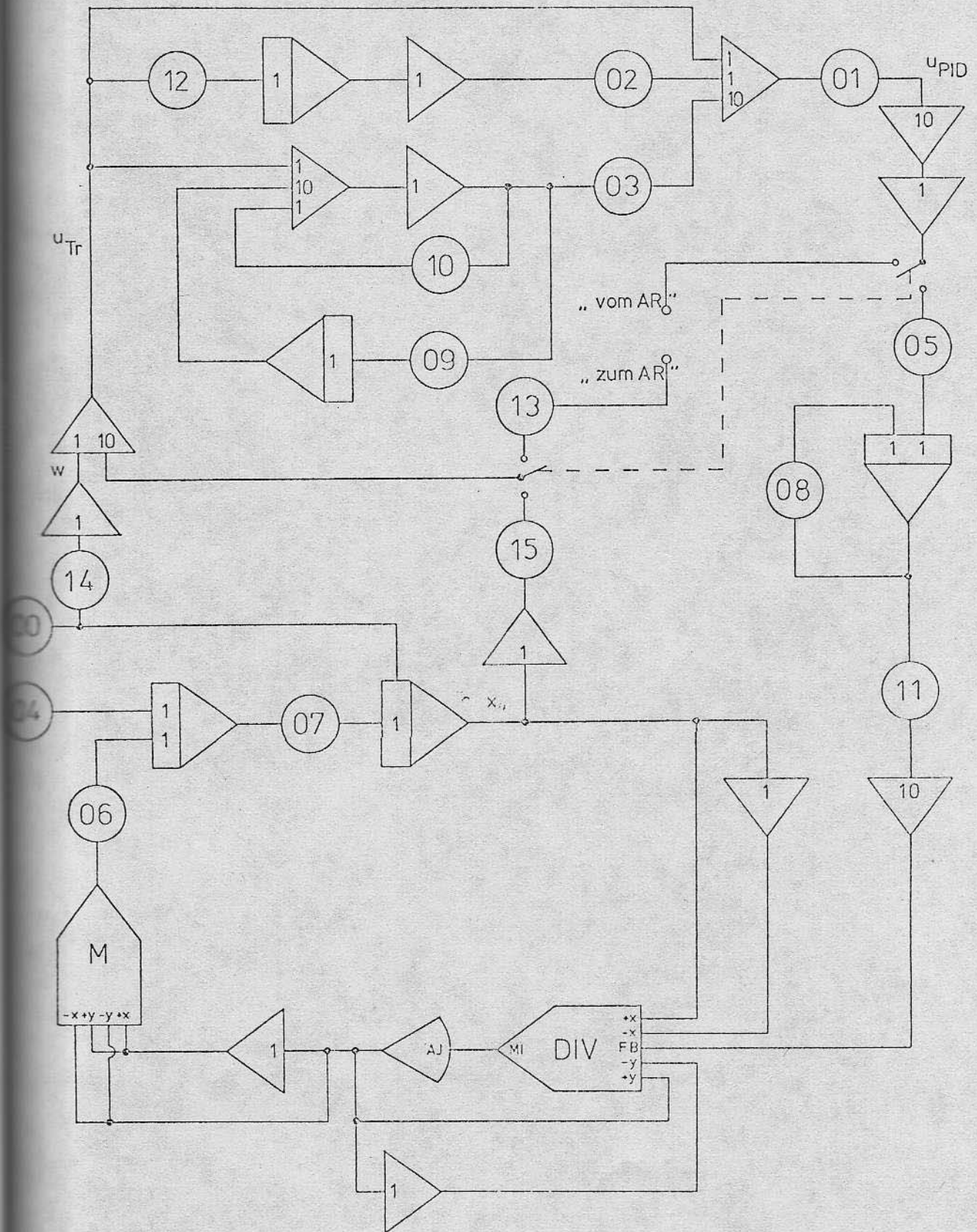


Abb. 27

3.1.6 Kopplung der Teilsysteme

Im Praktikum sollen mit dem gleichen Regelsystem die simulierte und die reale Strecke geregelt werden.

Abb. 28 veranschaulicht die Beschaltung.

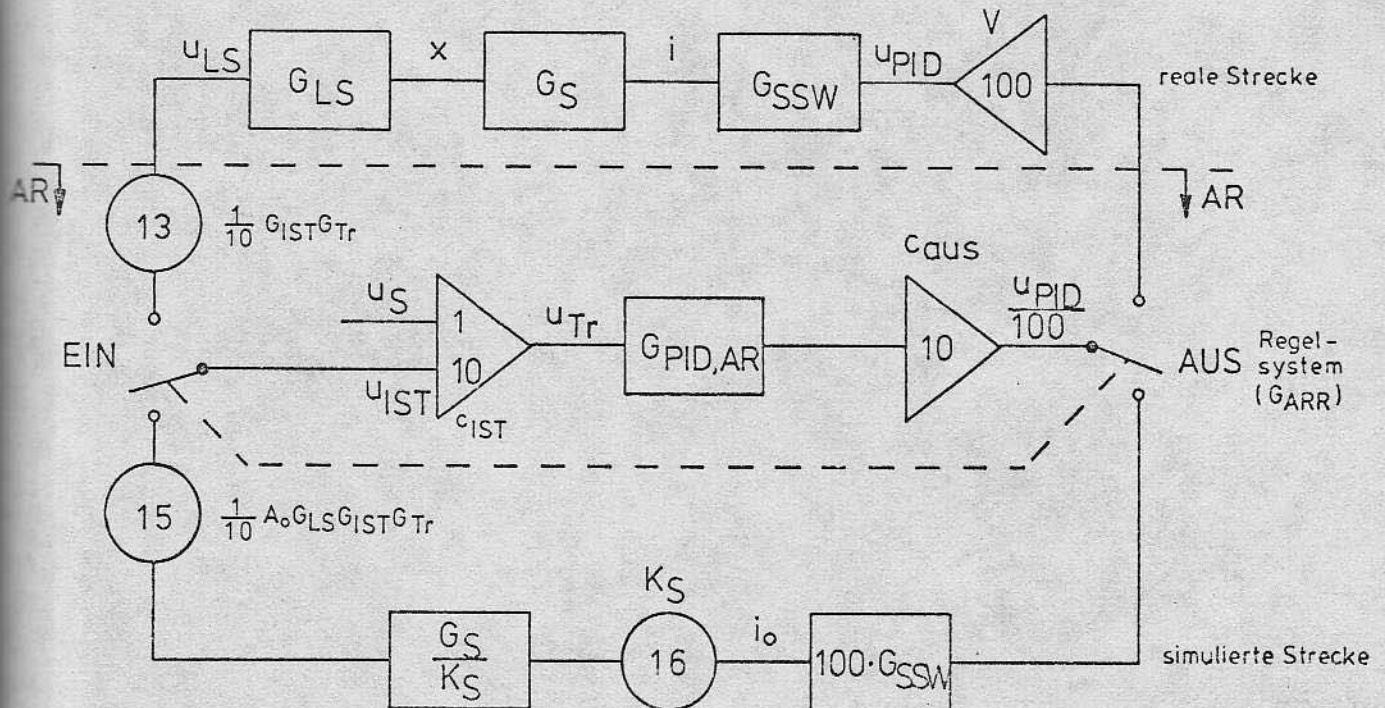


Abb. 28

Der SSW der realen Strecke verfügt über eine Eingangsverstärkung von $V = 100$. Hinter dem IS-System wird über α_{13} , das gemeinsam mit der Eingangsverstärkung c_{IST} den Übertragungsfunktionen von Soll-Istwertvergleich und Trennverstärker entspricht, dem AR-Regelsystem die Lageinformation zugeführt. Um einen ausreichenden Regelbereich zu erhalten, wird eine Reglerverstärkung $c_{aus} = 10$ vorgesehen.

Bei Regelung der simulierten Strecke wird V im Verzögerungsglied berücksichtigt.

α_{15} dient der Umsetzung von x_0 zu der der realen Strecke entsprechenden Spannung.

Für die reale Strecke gilt

$$G_{ARR} \stackrel{!}{=} G_{IST} G_{Tr} G_{PID}$$

und damit

$$\alpha_{13} c_{IST} G_{PID,AR} c_{aus} V = 1.54 G_{PID} .$$

Hieraus folgen

$$\alpha_{13} = 0.154$$

$$c_{IST} = 10$$

$$c_{aus} = 10$$

$$|G_{PID,AR}| = 0 \div 1$$

In EIN und AUS müssen , um ohne Regleränderung umschalten zu können , die Größen identisch sein .

Für EIN gilt demnach

$$\underbrace{\frac{1}{10} x_o A_o}_{\substack{x \text{ in ME} \\ x \text{ in V}}} G_{LS} G_{IST} G_{Tr} = \underbrace{x G_{LS}}_{\text{in V}} G_{IST} G_{Tr}$$

und man erhält

$$\alpha_{15} = \frac{1}{10} A_o G_{LS} G_{IST} G_{Tr} = 0.09225 \quad .$$

Für AUS folgt

$$i_o = 100 G_{SSW} \frac{U_{PID}}{100} 10$$

$$= \underbrace{G_{SSW} U_{PID}}_{\substack{i_o \text{ in V} \\ i_o \text{ in ME}}} 10$$

und

$$\alpha_{11} = \sqrt{\frac{g}{A_2}} \frac{K_S B}{A_o} \quad .$$

Die Sollwerteinstellung erfolgt durch die Potentiometer α_{00} und α_{14} und es werden

$$\alpha_{00} = \frac{x_S}{A_o}$$

und
$$\alpha_{14} = A_o G_S G_{IST} G_{Tr} = 10 \alpha_{15} = 0.9225 \quad .$$

Es ist zu beachten , daß die Differenz $u_S - u_{IST}$ einer sprunghaften Anfangsstörung entspricht . Diese darf aufgrund der begrenzten Reglerverstärkung nicht beliebig groß gewählt werden .

3.1.7 Beispiel

$$\left. \begin{array}{l} m = 108.7 \text{ g} \\ x_S = 14.72 \text{ mm} \end{array} \right\} K_S = 0.009577 \frac{\text{m}}{\text{A}}$$

Berechnung der Potentiometerwerte

$$\alpha_{04} c_1 = \frac{g}{A_2} = \frac{9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{200 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 0.0491 ; \quad \alpha_{04} = 0.0491 , \quad c_1 = 1$$

$$\alpha_{11} c_{10} = \sqrt{\frac{g}{A_2}} \frac{K_S B}{A_0} 10 = \sqrt{\frac{9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{200 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} \frac{0.009577 \cdot 2}{0.045} 10 = 0.9427 ;$$

$$\alpha_{11} = 0.0943 , \quad c = 10$$

$$\alpha_{06} c = \frac{A_2}{A_1 k} = 1 ;$$

$$\alpha_{06} = 1 , \quad c = 1$$

$$\alpha_{07} c = \frac{A_1}{A_0 k} = 0.01778 ;$$

$$\alpha_{07} = 0.0178 , \quad c = 1$$

$$\alpha_{00} = \frac{x_S}{A_0} = 0.3272$$

Die aus der WOK-Betrachtung gewonnenen Reglereinstellungen sollen im folgenden simuliert werden .

Die Gleichung des offenen Kreises lautet nach (8)

$$G_o(p) = \frac{-0.009577 \frac{\text{m}}{\text{A}} 1 \frac{\text{mA}}{\text{mm}} K_R (1 + T_{R1} p) (1 + T_{R2} p)}{p(1 + T_p)(1 - T_p)(1 + T_v p)(1 + T_D p)}$$

oder

$$G_o(p) = \frac{-127590 T_{R1} T_{R2} K_R \left(\frac{1}{T_{R1}} + p\right) \left(\frac{1}{T_{R2}} + p\right) s^{-4}}{p(36.5s^{-1} + p)(36.5s^{-1} + p)(125s^{-1} + p)(80s^{-1} + p)}$$

$$\text{und} \quad K_R = \frac{k}{127590 T_{R1} T_{R2}} s^2 .$$

Für Abb.18,19 ($T_{R1} = 33s$, $T_{R2} = 33ms$) erhält man bei Überschreiten der imaginären Achse die kritische Verstärkung

$$k_{\text{krit,min}} = 0.436 \cdot 10^6 s^{-1} ; \quad K_R \text{ krit,min} = \frac{0.436 \cdot 10^6 s^2}{127590 \cdot 33s \cdot 0.033s} = 3.14 s^{-1}$$

Mit (13) folgt

$$K_I = 3.14 \text{ s}^{-1}$$

$$\alpha_{02} = 0.00006$$

$$K_P = 103,62 \quad \text{und nach (14)}$$

$$\alpha_{01} = 0.1036$$

$$K_D = 2.122 \text{ s}$$

$$\alpha_{03} = 0.1023$$

Damit ergibt sich folgende Tabelle :

00	0.3272	09	0.0100
01	0.1036	10	0.3800
02	0.0060	11	0.0943
03	0.1023	12	0.0100
04	0.0491	13	0.1540
05	0.0613	14	0.9225
06	1.0000	15	0.0923
07	0.0178		
08	0.2500		

Zum Aufzeichnen der Sprungantworten mittels XY-Schreiber muß das Regelsystem wegen der Trägheit des Schreibers verlangsamt werden , was durch Herabsetzen der Potentiometer $\alpha_{04}, \alpha_{05}, \alpha_{06}, \alpha_{07}, \alpha_{08}, \alpha_{11}, \alpha_{12}$ auf ein Zehntel ihres berechneten Wertes geschieht .

Weitere Einstellungen seien tabellarisch aufgeführt :

Abb.	19	12	13	20
T_{R1}	33s	1s	10s	-
T_{R2}	33ms	27.4ms	27.4ms	27.4ms
$k_{krit,min}$	$0.436 \cdot 10^6 s^{-1}$	$0.4 \cdot 10^6 s^{-1}$	$0.367 \cdot 10^6 s^{-1}$	$0.357 \cdot 10^6$
$K_R \text{ krit,min}$	$3.14 s^{-1}$	$114.4 s^{-1}$	$10.51 s^{-1}$	102.1
K_I	$3.14 s^{-1}$	$114.4 s^{-1}$	$10.51 s^{-1}$	-
K_P	103.62	116.2	105.2	102.1
K_D	2.122s	1.68s	1.56s	1.52
α_{01}	0.1036	0.1162	0.1052	0.1021
α_{02}	0.006	0.002	0.0002	-
α_{03}	0.1023	0.0723	0.0743	0.0744

4. Schaltungsbeschreibung

Das im Versuch realisierte Regelsystem setzt sich aus Lichtschrankensystem, Soll-Istwertvergleich, PID-Regler, Spannungs-Stromwandler und Netzteil zusammen.

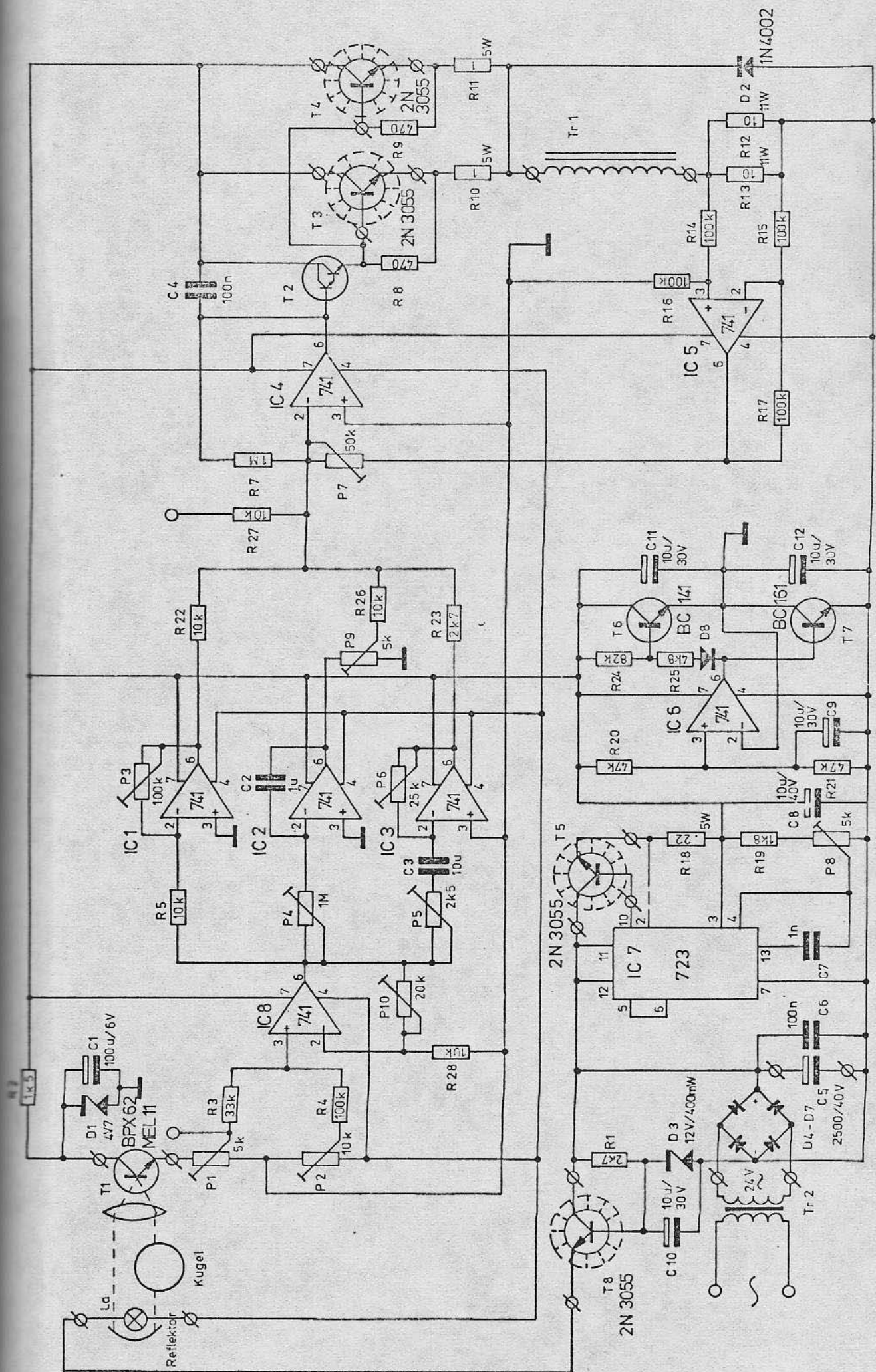
Das Lichtschrankensystem besteht aus Fototransistor, Sammellinse, Reflektor und Lampe, die von einem stabilisierten Netzteil gespeist wird, das mit Transistor T_8 und den Komponenten R_1, C_{10}, D_3 aufgebaut ist. Der Fototransistor T_9 wird ebenfalls von einer stabilisierten Spannungsquelle gespeist (R_2, C_1, D_1). In seinem Emitterzweig liegt das Trimpotentiometer P_1 . Der Spannungsabfall an diesem Potentiometer bestimmt den Abstand zwischen Anker und Magnet.

Als Trennverstärker zur Entkopplung von Soll-Istwertvergleich und PID-Regelteil dient der Operationsverstärker IC 8, dessen Verstärkungsfaktor K_{Tr} mit Potentiometer P_{10} eingestellt wird. Am Eingang werden zwei Spannungen summiert. Zum einen die positive Spannung von Potentiometer P_1 und zum anderen die negative Gleichspannung von Potentiometer P_2 , das der Sollwertvorgabe dient. Die Summe dieser beiden Spannungen bildet um K_{Tr} verstärkt die Eingangsspannung des PID-Reglers, so daß mittels des als Summierverstärker beschalteten IC 4 der Transistor T_2 angesteuert werden kann. Bei der Schaltung handelt es sich um eine spannungsgesteuerte Stromquelle, deren Leistungstransistoren T_3 und T_4 den Strom durch den Elektromagneten Tr_1 steuern.

Den Rückkopplungszweig des Spannungs-Stromwandlers bilden der Operationsverstärker IC 5 und die Widerstände $R_{14...17}$ sowie das Trimpotentiometer P_7 . Da der dem Strom proportionale Spannungsabfall an den Widerständen R_{12} und R_{13} nicht massebezogen ist, mußte IC 5 eingefügt werden.

Das Netzteil besteht aus einem Spannungsstabilisator IC 7 und einem Längstransistor T_5 . Um eine symmetrische Versorgungsspannung für die Operationsverstärker zu erhalten, wurde an den nichtinvertierenden Eingang von IC 6 die halbe Ausgangsspannung des Stabilisators IC 7 gelegt. Durch die Gegenkopplung des Operationsverstärkers liegen auch die Emitter der

Transistoren T_6 und T_7 auf halber Speisespannung . Die Emitter dieser Transistoren bilden den Massepunkt der Schaltung . Zur Vermeidung hochfrequenter Schwingungen werden die Kondensatoren C_{11} und C_{12} sowie die Ausgleichsschaltung durch die Widerstände R_{24}, R_{25} und die Diode D_8 eingesetzt . Die Potentiometer P_2, P_3, P_9 und P_6 wurden aus dem Gehäuse herausgeführt und als 10-Gangpotentiometer ausgelegt . Zwei Steckbuchsen ermöglichen das Umgehen des internen Regelsystems durch Abgriff der Fototransistorspannung zum einen und Aufgabe eines externen Regelsignals an R_{27} zum anderen .



BauteileWiderstände

R1, R23	2k7
R2	1k5
R3	33k
R4, R14...17	100k
R5, R6, R22, R26...28	10k
R7	1M
R8, R9	470
R10, R11	1 /5VA
R12, R13	10 /11VA
R18	.22/5VA
R19	1k8
R20, R21	47k
R24	82k
R25	4k8

Potentiometer

P1, P8	5k
P2	10k Wendel
P3	100k Wendel
P4, P10	1M
P5	2k5
P6	25k Wendel
P7	50k
P9	5k Wendel

Kondensatoren

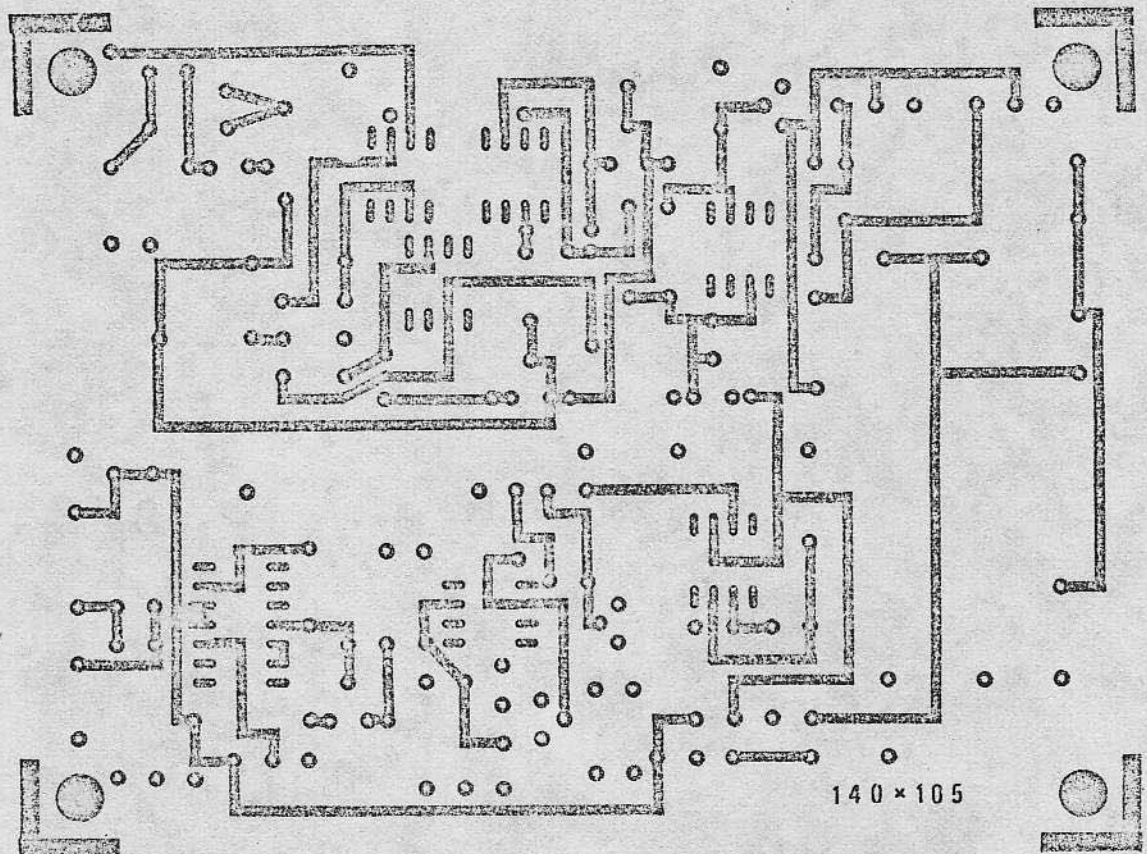
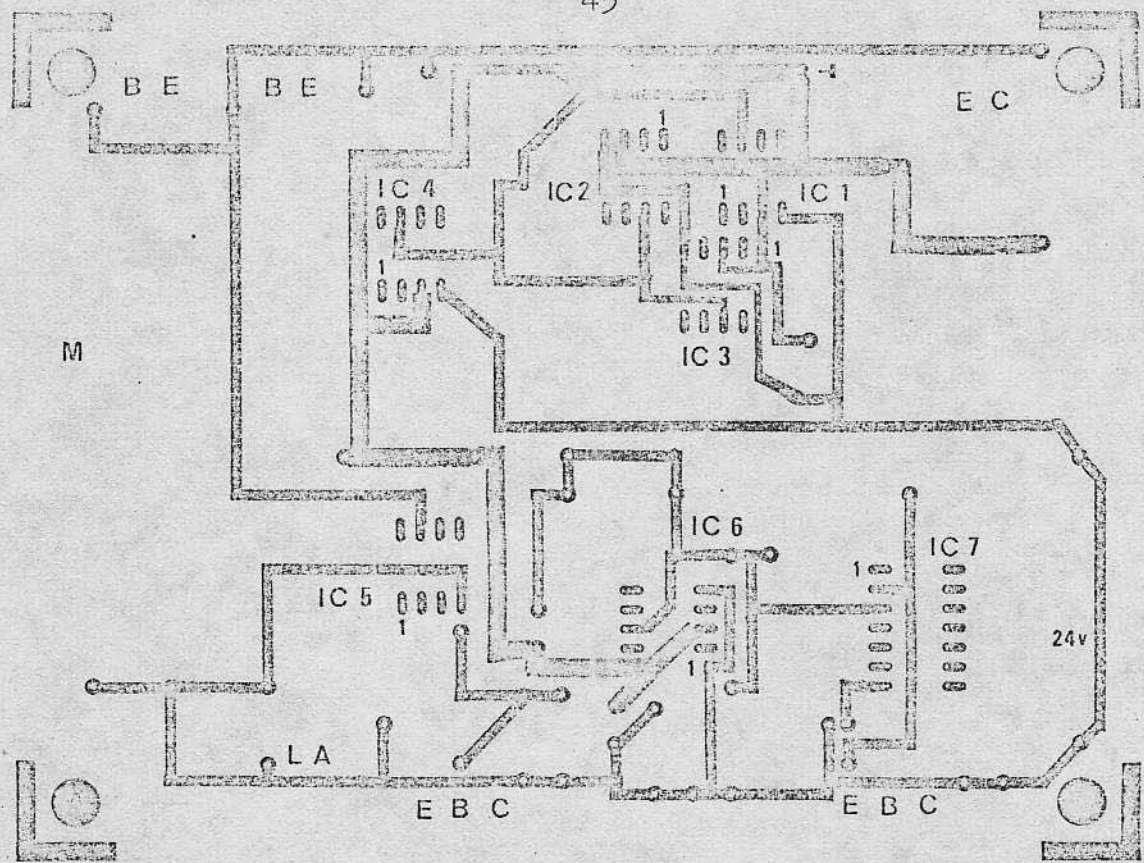
C1	100u/6V
C2	1u
C3	10u
C4, C6	100n
C5	2500u/40V
C7	1n
C8	10u/40V
C9...12	10u/30V

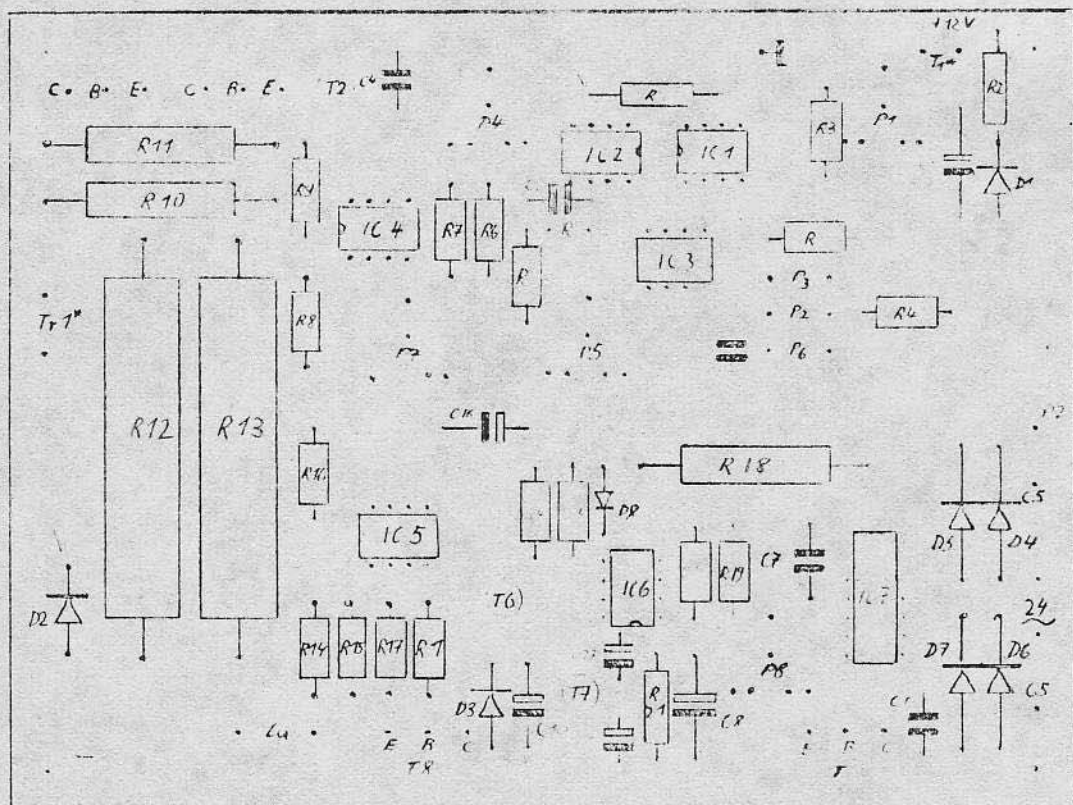
Halbleiter

T1	BPY 61 , BPY 62 , BPX 62 MEL11 o.ä.
T2	BC 517
T3...5, T8	2 N 3055
T6	BC 141
T7	BC 161
D1	4V7/400mW , Zener
D2	1 N 4002
D3	12V/400mW , Zener
D4...7	Si-Diode 3A/40V
D8	Si-Diode 1A/12V
IC1...6, 8	741
IC7	723

Diverses

LA	Birne 12V/ca.100mA
Reflektor	
Konvexe Linse	f=100mm
Tr1	zum Magneten umgebauter Netztransformator
Tr2	Netztransformator 24V/3A





Auf der Platine und dem Bestückungsplan ist der Trennverstärker (IC 8) nicht vorgesehen, da sich seine Notwendigkeit erst nach Fertigung der Platine ergeben hat. Bei einem Nachbau sollte er daher gleich auf der Platine vorgesehen werden.

5. Literatur

- 1 Elektor, 1/77 : "Schwerkraftabsorber" .
- 2 Fritsche, R.: "Analogrechnen II" , Regelungstechnisches Praktikum , Universität Karlsruhe .
- 3 Mesch, F.: "Regelungstechnik II" , Vorlesung an der Universität Karlsruhe .
- 4 Föllinger, O.: "Regelungstechnik" , Elitera-Verlag , Berlin 33 1972 .
- 5 Simonyi, K.: "Theoretische Elektrotechnik" , 6.Auflage , VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften , Berlin 1977 .
- 6 Heinhold, J./Kulisch, U.: "Analogrechnen" , BI Wissenschaftsverlag , Mannheim 1969 .

Analogrechnen II

- Lehrstoff :
1. Regelung einer instabilen Strecke
 2. Stabilitätsuntersuchung nach dem Hurwitz-Kriterium
 3. Reglerauslegung nach dem Wurzelortsverfahren
 4. Selbständige Simulation auf einem modernen Analogrechner

- Inhalt :
1. Grundlagen
 - 1.1 Stabilitätskriterien
 - 1.1.1 Stabilitätsdefinition
 - 1.1.2 Kriterium von Hurwitz
 - 1.1.3 Beispiel
 - 1.2 Das Wurzelortsverfahren
 - 1.2.1 Definition der Wurzelortskurve
 - 1.2.2 Beispiel
 - 1.2.3 Dominante Pole
 - 1.2.4 Diskussion des Kurvenverlaufs
 2. Regelung einer magnetischen Aufhängung
 - 2.1 Untersuchung der Teilsysteme
 - 2.2 Aufstellen der Übertragungsfunktion des offenen Kreises
 3. Simulation auf dem Analogrechner
 - 3.1 Schaltungsentwurf
 - 3.2 Messung der Sprungantwort
 4. Versuchsvorbereitung
 5. Versuchsdurchführung und Auswertung
 6. Literatur
 7. Anhang

Einleitung

Der Zweck einer Regelung ist normalerweise der Ausgleich von Störungen , kann aber auch die Verbesserung des dynamischen Verhaltens sein . Letzteres ist insbesondere bei instabilen Strecken (z.B. Überkopffpendel, Hubschrauber) der Fall , die mit einem geeigneten Regler stabilisiert werden müssen . Im vorliegenden Versuch soll die Regelung einer instabilen Strecke (magnetische Aufhängung) untersucht und an einem Analogrechner simuliert werden .

1. Grundlagen

Die nächstliegende Frage bei der Auslegung eines Regelkreises ist die nach der Stabilität . Bei höheren Ansprüchen wird jedoch häufig nicht nur Stabilität , sondern ein bestimmtes dynamisches Verhalten verlangt . In diesem Abschnitt wird daher zunächst ein Stabilitätskriterium behandelt ; es folgt das Wurzelortsverfahren , welches die Analyse des gesamten dynamischen Verhaltens eines Regelkreises und in gewissem Umfang auch seine Synthese gestattet .

1.1 Stabilitätskriterien

1.1.1 Stabilitätsdefinition

Im folgenden sollen nur lineare zeitinvariante Systeme betrachtet werden , die sich durch folgende Differentialgleichung beschreiben lassen :

$$\begin{aligned} a_n^{(n)} y(t) + \dots + a_2 \ddot{y}(t) + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_0 x(t) + b_1 \dot{x}(t) + \\ + \dots + b_m^{(m)} x(t) \end{aligned} \quad (1)$$

Für die Stabilität oder Instabilität des Systems spielt nur die homogene Differentialgleichung eine Rolle , da die Stabilität eine Systemeigenschaft ist und damit bei linearen Systemen unabhängig von den Eingangssignalen $x(t)$ definiert sein sollte . Als Lösung der homogenen Differentialgleichung ergibt sich bei einfachen Wurzeln λ_i der zugehörigen charakteristischen Gleichung eine Summe von Gliedern der Gestalt

$$C_i e^{\lambda_i t} \quad (2)$$

- bei mehrfachen Wurzeln Glieder der Gestalt

$$C_{ij} t^j e^{\lambda_i t} \quad (3)$$

Man spricht von einfacher Stabilität, wenn die homogene Lösung für beliebige Anfangsbedingungen und beliebige Zeiten beschränkt bleibt, wenn also $|y_{\text{hom}}(t)| < \infty$ gilt. Dies ergibt bei einfachen Wurzeln die Bedingung

$$\operatorname{Re} \{\lambda_i\} \leq 0$$

und bei mehrfachen Wurzeln

$$\operatorname{Re} \{\lambda_i\} < 0 \quad .$$

Dagegen spricht man von asymptotischer Stabilität, wenn die homogene Lösung für große Zeiten asymptotisch gegen Null strebt, wenn also

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_{\text{hom}}(t) = 0$$

gilt. Dies ist auch bei einfachen Wurzeln nur möglich für

$$\operatorname{Re} \{\lambda_i\} < 0 \quad .$$

Da die Wurzeln der charakteristischen Gleichung gleichbedeutend den Polen der zugehörigen Übertragungsfunktion

$$G(p) = \frac{Z(p)}{N(p)} = \frac{b_0 + b_1 p + \dots + b_m p^m}{a_0 + a_1 p + \dots + a_n p^n} \quad (4)$$

sind, ist das System asymptotisch stabil, wenn alle Pole von $G(p)$ links der imaginären Achse der komplexen p -Ebene liegen.

Im folgenden sei nur die asymptotische Stabilität betrachtet.

Bei Systemen höherer Ordnung ist die explizite Berechnung der Wurzeln λ_i recht mühsam. Der Zweck der Stabilitätskriterien ist nun, Bedingungen für die Stabilität anzugeben, ohne die Wurzeln explizit ausrechnen zu müssen.

Man kann dabei algebraische und graphische Stabilitätskriterien unterscheiden. Die algebraischen Kriterien gehen von der charakteristischen Gleichung der Differentialgleichung (bzw. vom Nennerpolynom der Übertragungsfunktion) aus und geben Bedingungen für die Koeffizienten $a_0, a_1, \dots, a_n$

an , unter denen alle Wurzeln negative Realteile haben . Diese Kriterien gelten allgemein für Differentialgleichungen der Form Gl. (1) bzw. für rationale Übertragungsfunktionen (4) und sind daher nicht geeignet für transzendente Übertragungsfunktionen , z.B. Systeme mit Totzeit . Ein derartiges algebraisches Kriterium von Hurwitz wird im folgenden behandelt ; das in der Literatur auch häufig genannte Kriterium von Routh ist dem von Hurwitz gleichwertig .

Die graphischen Kriterien gehen von der Ortskurve des zugehörigen Frequenzganges aus und sind somit auch für transzendente Übertragungsfunktionen geeignet . Das wichtigste graphische Kriterium ist das Nyquistkriterium , das speziell von der regelungstechnischen Fragestellung ausgeht , wann ein geschlossener Regelkreis bei bekanntem offenem Kreis stabil ist ; es ist besonders dann geeignet , wenn der offene Kreis experimentell untersucht wurde . Dieses Kriterium wird in [1] behandelt .

1.1.2 Kriterium von Hurwitz

Die charakteristische Gleichung zu (1) bzw. das Nennerpolynom von (4)

$$N(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0 \quad (5)$$

habe reelle Koeffizienten a_i mit $a_n > 0$. Dann lautet das allgemeine Hurwitz-Kriterium (vgl. [2]) :

Man bilde eine Determinante nach dem Schema

$$H = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_4 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} \quad (6)$$

n-Zeilen
n-Spalten

und darin , links oben beginnend , die angedeuteten Unterdeterminanten . Wenn alle diese Determinanten positiv sind , dann haben alle Wurzeln negativen Realteil . Diese Bedingung ist notwendig und hinreichend .

Wenn man diese Determinanten auswertet , kann man das Hurwitz-Kriterium auch in folgender Form angeben :

- 1) Alle Koeffizienten a_i müssen vorhanden sein und dasselbe Vorzeichen haben , also

$$a_i > 0 \quad . \quad (7)$$

Diese Bedingung ist besonders leicht nachzuprüfen ; sie stellt sicher , daß keine reellen Wurzeln positiv sind (monotone Instabilität) , sagt aber noch nichts über den Realteil komplexer Wurzeln aus . Es handelt sich also um eine notwendige Bedingung ; nur bei Systemen 1. und 2. Ordnung ist sie auch hinreichend .

- 2) Hinreichende Bedingungen lauten für Systeme bis zur 5. Ordnung :

$$\begin{aligned} n = 3 \quad & a_0 a_3 - a_1 a_2 < 0 \\ n = 4 \quad & a_4 a_1^2 + a_0 a_3^2 - a_1 a_2 a_3 < 0 \\ n = 5 \quad & \begin{cases} a_2 a_5 - a_3 a_4 < 0 \\ (a_1 a_4 - a_0 a_5)^2 - (a_3 a_4 - a_2 a_5)(a_1 a_2 - a_0 a_3) < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (8)$$

Diese Bedingungen stellen sicher , daß auch keine positiven Realteile komplexer Wurzeln (oszillatorische Instabilität) auftreten .

Das angegebene Kriterium gilt für allgemeine dynamische Systeme , die durch die Differentialgleichung (1) oder die Übertragungsfunktion $G(p)$ nach Gl. (4) beschrieben werden. Speziell bei geschlossenen Regelkreisen lautet die charakteristische Gleichung

$$G_0(p) + 1 = 0 \quad (9)$$

wobei $G_0(p)$ die Übertragungsfunktion des aufgeschnittenen Kreises bezeichnet . Bei geschlossenen Regelkreisen ist das Kriterium daher auf (9) anzuwenden .

Die Anwendung des Hurwitz-Kriteriums sei anhand eines Beispiels erläutert .

1.1.3 Beispiel

Gegeben sei die Übertragungsfunktion einer Strecke :

$$G_S(p) = \frac{K_S}{(1 + T_p)(1 - T_p)} \cdot \frac{1}{1 + T_v p} \quad (10)$$

Die Strecke ist offensichtlich instabil , da einer der Pole positiv reell ist . Auch das Kriterium (7) würde Instabilität anzeigen .

Die Strecke soll mit einem realen PID-Regler

$$G_R(p) = \frac{-K_R(1 + T_{R1}p)(1 + T_{R2}p)}{p(1 + T_Dp)}$$

stabilisiert werden . Die charakteristische Gleichung des geschlossenen Kreises lautet mit (9) :

$$G_O(p) + 1 = \frac{-K_R K_S (1 + T_{R1}p)(1 + T_{R2}p)}{p(1 + T_Dp)(1 + T_p)(1 - T_p)(1 + T_v p)} + 1 = 0 ,$$

$$T > T_v > T_D$$

Es liegt ein System 5. Ordnung vor . Da die Kompensation der größten Zeitkonstante ratsam erscheint , erhält man mit

$T_{R1} = T$ ein System 4. Ordnung :

$$G_O(p) + 1 = \frac{-K_R K_S (1 + T_{R2}p)}{p(1 + T_Dp)(1 + T_v p)(1 - T_p)} + 1 = 0$$

oder

$$0 = \underbrace{T T_D T_v p^4}_{a_4} + \underbrace{(T T_v + T_D T - T_D T_v) p^3}_{a_3} + \underbrace{(T - T_v - T_D) p^2}_{a_2} + \underbrace{(K_S K_R T_{R2} - 1) p}_{a_1} + \underbrace{K_S K_R}_{a_0} \quad (11)$$

Aus $a_i > 0$ nach (7) folgt , daß

$$K_S K_R > 0$$

und $K_R > \frac{1}{K_S T_{R2}}$ sein muß .

Aus (8) folgt für $n = 4$:

$$\underbrace{K_R^2 a_4 K_S^2 T_{R2}^2}_A + K_R \underbrace{(K_S a_3^2 - T_{R2} a_2 a_3 K_S - 2a_4 K_S T_{R2})}_B + \underbrace{a_4 + a_2 a_3}_C > 0 \quad (12)$$

Damit K_R reell bleibt, muß gelten: $B^2 - 4AC > 0$, woraus sich ein Zeitbereich $T_{R2} > T_{R2, \text{krit.}}$ ergibt, für den K_R reell ist. Wählt man daraus ein T_{R2} , so erhält man aus (11) die kritischen Werte $K_{R \text{ min, max}}$.

1.2 Das Wurzelortsverfahren

Das Wurzelortsverfahren geht von den Polen der Übertragungsfunktion $G_o(p)$ des offenen Kreises aus und bestimmt auf graphischem Wege die Pole des geschlossenen Kreises.

1.2.1 Definition der Wurzelortskurve

Die Übertragungsfunktion des offenen Kreises habe die Form

$$G_o(p) = k \frac{Z_o(p)}{N_o(p)} = k \frac{\prod_{i=1}^m (p - p_{Z_i})}{\prod_{j=1}^n (p - p_j)} \quad (13)$$

mit $k \geq 0$, $m \leq n$; $p_{Z_i} \neq p_j$ p_{Z_i} = Nullstellen des offenen Kreises

p_j = Pole des offenen Kreises

Aus der charakteristischen Gleichung (9) des geschlossenen Kreises ergibt sich mit (13) die Bedingung

$$k \frac{Z_o(p)}{N_o(p)} \stackrel{!}{=} -1 \quad (14)$$

Als Wurzelortskurve - kurz: WOK - bezeichnet man nun die Gesamtheit aller Punkte p in der komplexen Ebene, die diese Gleichung erfüllen, wenn der Parameter k von 0 bis $+\infty$ variiert wird.

Gl. (14) kann in zwei Gleichungen für Betrag und Winkel aufgespalten werden:

$$k \left| \frac{Z_o(p)}{N_o(p)} \right| = 1 \quad (15)$$

$$\arg \left(k \frac{Z_o(p)}{N_o(p)} \right) = (2v+1)\pi, \quad v = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (16)$$

Aus (16) folgt mit (13), wenn man $k > 0$ voraussetzt:

$$\sum_{i=1}^m \arg(p - p_{Z_i}) - \sum_{j=1}^n \arg(p - p_j) = (2v+1)\pi \quad (17)$$

Hieraus ergibt sich eine Vorschrift zur graphischen Konstruktion der Wurzelortskurve: durch Probieren sind einige Punkte der p -Ebene aufzusuchen, für welche die Winkelbedingung (17) erfüllt ist.

Aus der Betragsbedingung (15) folgt mit (13):

$$k = \frac{\prod_{j=1}^n |p - p_j|}{\prod_{i=1}^m |p - p_{Z_i}|} \quad (18)$$

Durch Ausmessen der Strecken $p - p_j$ und $p - p_{Z_i}$ läßt sich k bestimmen und als Parameter auf der WOK auftragen.

Die graphische Konstruktion wird wesentlich beschleunigt und erleichtert, wenn man die im Anhang zusammengefaßten Regeln über die geometrischen Eigenschaften der WOK beachtet.

1.2.2 Beispiel

Die WOK der Strecke und des Reglers von Beispiel 1.1.3 mit $T=27.4$ ms, $T_V=8$ ms, $T_D=12.5$ ms, $K_S=0.009577 \frac{m}{A}$ und $T_{R1}=27.4$ ms soll skizziert werden.

Die Betrachtung nach 1.1.3 ergibt $T_{R2} > 0.363$ s und mit gewähltem $T_{R2} = 1$ s

$$K_{R,max} = 209.6 \frac{As^{-1}}{m}, \quad K_{R,min} = 112.5 \frac{As^{-1}}{m}$$

Für $p=j\omega$ lassen sich nun mit Hilfe eines Koeffizientenvergleichs aus (11) die kritischen Kreisfrequenzen bestimmen:

$$-a_3\omega^2 + a_1 = 0 \quad \omega_{1/2} = \pm \frac{a_1}{a_3}; \quad \begin{aligned} \omega_1 &= \pm 12.9 \text{ s}^{-1} \\ \omega_2 &= \pm 46.7 \text{ s}^{-1} \end{aligned}$$

Es gilt

$$G_R(p)G_S(p) = \frac{-0.009577 K_R (1 + 1s p) \frac{m}{A}}{p(1 + 12.5ms p)(1 + 8ms p)(1 - 27.4ms p)}$$

$$G_R(p)G_S(p) = k \frac{-(1s^{-1} + p)}{p(80s^{-1} + p)(125s^{-1} + p)(36.5s^{-1} - p)} s^{-2}$$

$$k = 3495 K_R \frac{m}{A}$$

Das Aufzeichnen der WOK von Bild (1) erfolgt in einzelnen Schritten mit Hilfe der Regeln des Anhangs .

1. Eintragen der Pole und Nullstellen

bei $p_1=0s^{-1}$, $p_2=36.5s^{-1}$, $p_3=-125s^{-1}$, $p_4=-80s^{-1}$,
 $p_{Z2}=-1s^{-1}$

und Einzeichnen der WOK auf der reellen Achse nach Regel 7 .

2. Berechnung der Asymptoten (Regel 5) :

$$\sigma_A = \frac{36.5s^{-1} - 125s^{-1} - 80s^{-1} + 1s^{-1}}{4 - 1} = -55.83 s^{-1}$$

$$\varphi_A = \frac{180^\circ + \lambda \cdot 360^\circ}{4 - 1}, \quad \lambda = 0, 1, 2$$

$$\varphi_{A0} = 60^\circ; \varphi_{A1} = 180^\circ; \varphi_{A2} = -60^\circ$$

3. Berechnung der Verzweigungspunkte nach Regel 6a :

$$\frac{1}{C + 1s^{-1}} = \frac{1}{C - 0} + \frac{1}{C - 36.5s^{-1}} + \frac{1}{C + 125s^{-1}} + \frac{1}{C + 80s^{-1}}$$

Es ergibt sich ein einziger Verzweigungspunkt bei $C = 7.4 s^{-1}$. Damit läßt sich die WOK nach Bild (1) skizzieren .

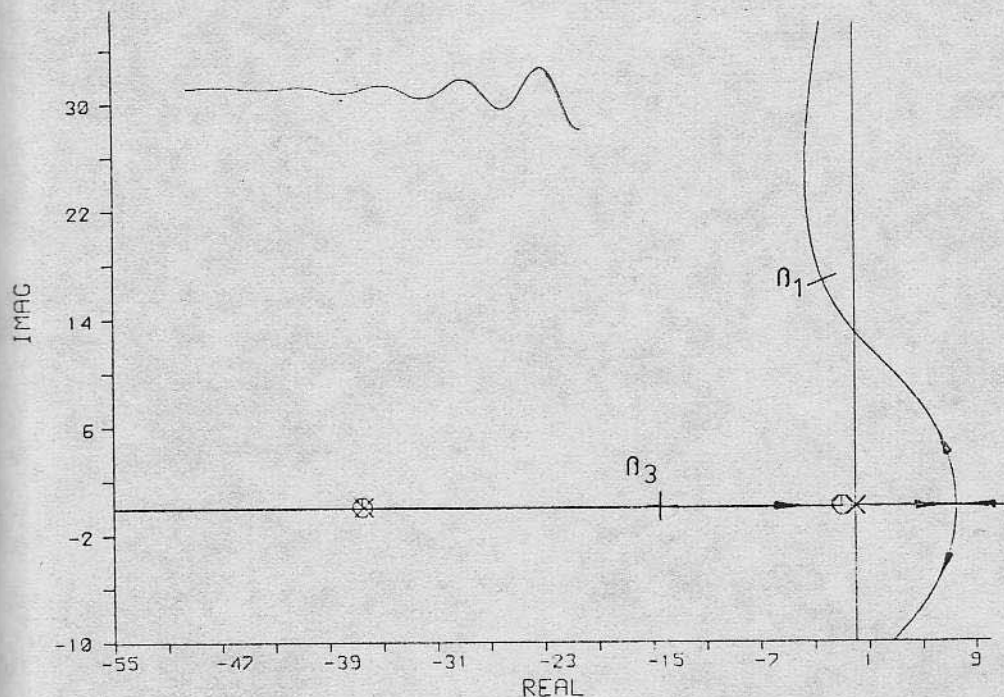


Bild (1)

1.2.3 Dominante Pole

Anhand der Wurzelortskurve kann die Verteilung der Pole des geschlossenen Regelkreises für einen bestimmten Wert k leicht abgelesen werden. Da außerdem die Nullstellen bekannt sind, bereitet es prinzipiell keine Schwierigkeiten, z.B. die Führungssprungantwort numerisch zu berechnen. Der Aufwand für eine exakte Lösung ist allerdings meistens beachtlich.

Häufig ist man jedoch weniger an einer exakten Lösung des Einschwingvorgangs als an einer groben Abschätzung interessiert, die man aus den dominanten (maßgebenden) Polen erhält. Maßgebend für das Zeitverhalten ⁺⁾ sind die Pole und Nullstellen in der Umgebung des Ursprungs, d.h. ferne Pole und Nullstellen können vernachlässigt werden, da ihr Einfluß gering ist. Im Bild (1) ergeben sich für einen bestimmten Wert k die Pole β_1, β_2 und β_3 . Die Pole β_1 und β_2 stellen ein dominantes Polpaar dar, während der Pol β_3 unberücksichtigt bleiben kann. Die Führungsübertragungsfunktion ist damit näherungsweise

$$G_W(p) = \frac{K'}{1 - \frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_1 \beta_2} p + \frac{1}{\beta_1 \beta_2} p^2}, \quad (19)$$

also ein System 2.Ordnung, das leicht diskutiert werden kann.

1.2.4 Diskussion des WOK-Verlaufs

Anhand der Reglerverstärkung läßt sich nun das Verhalten der geregelten Strecke diskutieren. Das Bestreben liegt darin, sie möglichst schnell und stabil zu machen, d.h. zwei dominante Pole auf der Winkelhalbierenden mit großem Abstand zur imaginären Achse wäre ideal. Betrachtet man hierzu die nötige Verstärkung, so erhält man jedoch einen zusätzlichen

⁺⁾ Genauer: für die zu den Polen gehörenden Residuen, das sind die Konstanten C_i bzw. C_{ij} in (2) und (3).

Pol auf der reellen Achse . Wird aber die Verstärkung verringert , so rücken die dominanten Pole zu nahe an die imaginäre Achse . Dieses Verhalten kann man umgehen , indem man auf eine Kompensation verzichtet und beide Nullstellen gegen den Ursprung schiebt . Da sich nun die ursprungsferne Nullstelle stärker auf die WOK-Äste auswirkt , wandern diese nach links . Dabei entstehen kreisförmige WOK-Teile um die Nullstellen (Abb. 2) . Bei entsprechender Verstärkung bewegt sich ein Pol vom Verzweigungspunkt des Kurventeils um den Ursprung auf die imaginäre Achse zu und bewirkt ein VZ1-Verhalten des Systems . Damit nur dieser Pol maßgebend wird , können die WOK-Äste so weit nach links verschoben werden , bis der Regelkreis sehr starkes VZ1-Verhalten aufweist (Abb. 3) .

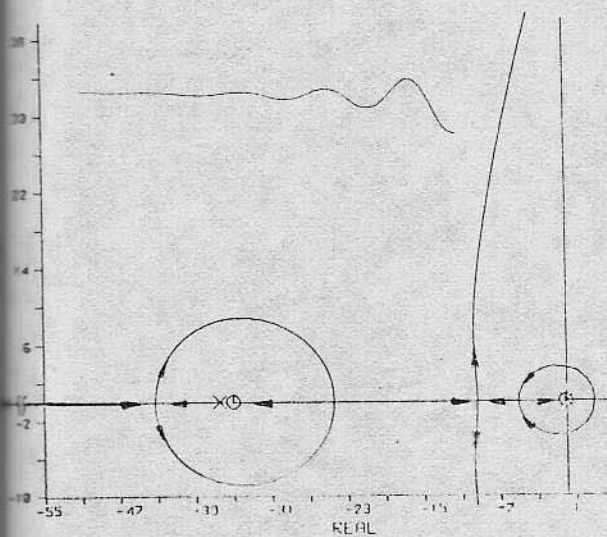


Abb.2

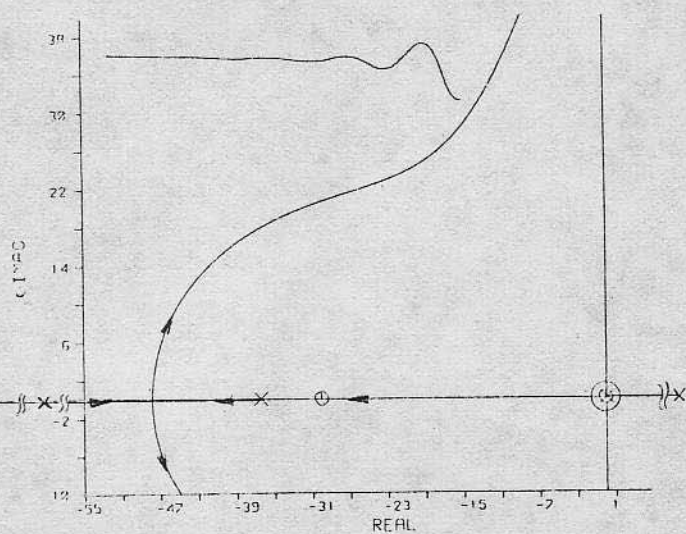


Abb.3

2. Regelung einer magnetischen Aufhängung

Bei höchsten Drehzahlen oder bei extremen Ansprüchen an geringe Lagerreibung versucht man , magnetische Lager zu benutzen . Diesen entspricht die in diesem Versuch zu behandelnde magnetische Aufhängung ,die folgendermaßen realisiert wird .

In einem stromgesteuerten Magnetfeld befindet sich ein freischwebender Anker ,dessen Abstand vom Magneten ein Lichtschrankensystem mißt . Dieses gibt eine dem Abstand entsprechende Spannung weiter , die mit einem wählbaren Sollwert verglichen wird . Ein nachgeschalteter PID-kegler steuert mittels dieser Information einen Spannungs-Strom-Wandler an ,

der seinerseits der Magnetspule einen das Magnetfeld bestimmenden Strom aufprägt (Abb.4) .

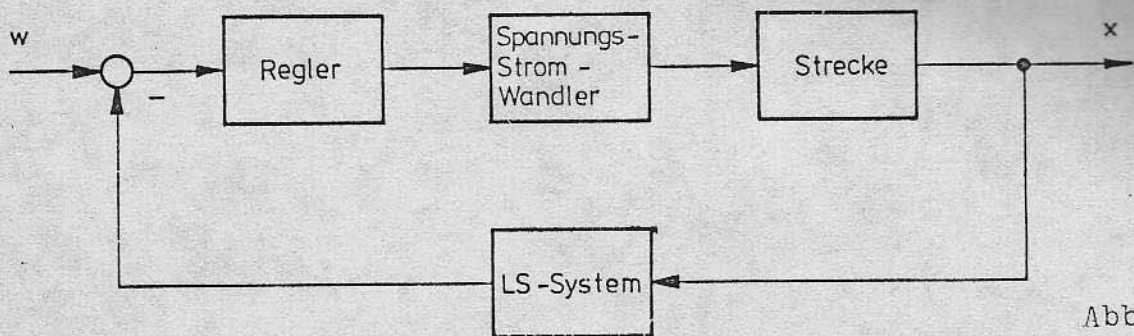


Abb. 4

2.1 Untersuchung der Teilsysteme

Zur Durchführung des Versuchs steht ein Modell zur Verfügung , dessen Übertragungsfunktionen sich wie folgt ergeben .

2.1.1 Lichtschrankensystem

Das LS-System , bestehend aus Strahler , optischem System und Foto-transistor , dient der Erfassung des Abstandes zwischen Magnet und Anker .

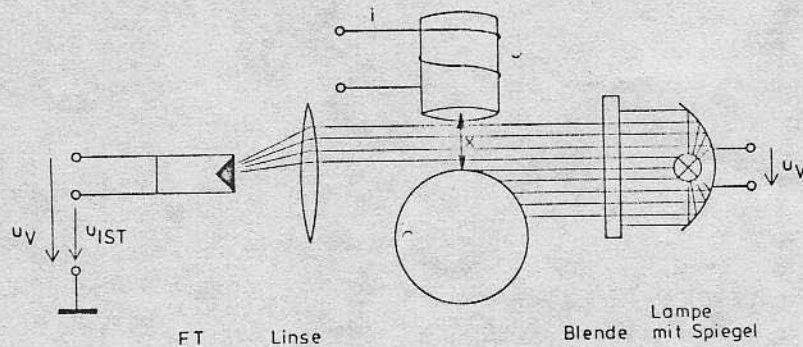


Abb. 5

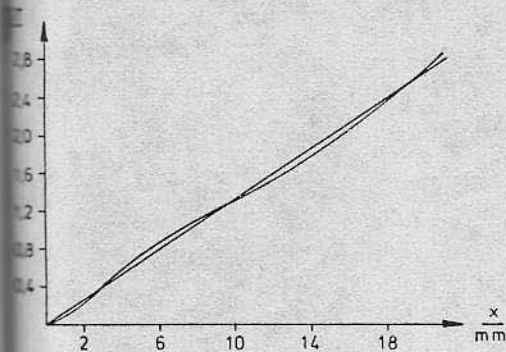
Es liefert die dem Lichteinfall und damit dem Abstand entsprechende Spannung u_{IST} .

Die Ermittlung der Kennlinie des optischen Meßsystems führt zu folgender Darstellung :

Demnach kann in einem Bereich von 20 mm die Kennlinie als linear mit einer Steigung von $133 \frac{\text{mV}}{\text{mm}}$ angenommen werden , d.h.

$$G_{LS} = K_{LS} = 133 \frac{\text{mV}}{\text{mm}} , \quad (20)$$

$$0 \leq x \leq 20 \text{ mm}$$



2.1.2 Spannungs-Strom-Wandler

Nach Abb. 7a läßt sich die Übertragungsfunktion des Spannungs-Strom-Wandlers (SSW) aufstellen. Dabei bewirkt die Magnetspule gemeinsam mit dem inneren Widerstand ein Verzögerungsverhalten des SSW:

$$G_I = \frac{i}{u_S} = \frac{1}{R + Lp} = \frac{\frac{1}{R}}{1 + \frac{L}{R}p} = \frac{K}{1 + T_{Ip}}$$

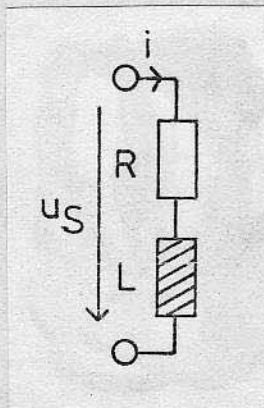


Abb. 7a

Der SSW soll möglichst verzögerungsfrei die vom Regler aufgegebene Spannung u_S in den Regelstrom i , der der Magnetspule aufgeprägt wird, umsetzen.

Mit $T_I = \frac{L}{R} = \frac{1.64 \text{ H}}{5.5 \Omega} = 300 \text{ ms}$ wird die Zeitkonstante jedoch so groß, daß eine Kaskadenregelung [4] vorgesehen werden muß:

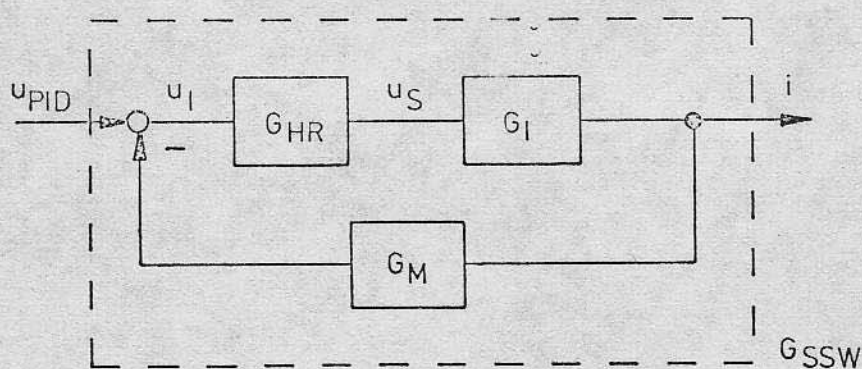


Abb. 7b

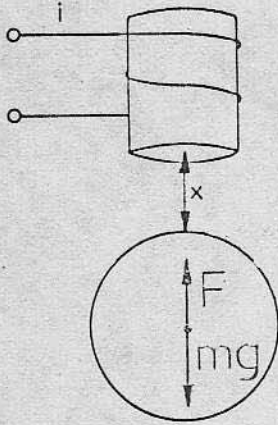
Damit folgt

$$G_{SSW} = \frac{G_{HR}G_I}{1 + G_I G_{HR} G_M} = \frac{G_{HR}K}{1 + \frac{T_I}{1 + KG_{HR}G_M}p} = \frac{K_W}{1 + T_{vp}} \quad (23)$$

Der solchermaßen realisierte Hilfsregelkreis besitzt eine Zeitkonstante von nur 8 ms:

$$K_W = 0.755 \frac{1}{\Omega}, \quad T_v = 8 \text{ ms}$$

2.1.3 Strecke



Die vom Magneten auf den Anker der Masse m in Abb. 8 ausgeübte Kraft ist allgemein proportional der Änderung der magnetischen Energie

$$\frac{dW_m}{dx} \sim i^2 \cdot \frac{d}{dx} \frac{1}{R_m}, \text{ mit } R_m \text{ magnetischer}$$

Widerstand des magnetischen Kreises, bei Annahme einer linearen Magnetisierungskennlinie des Eisens.

Abb. 8

Bei Vernachlässigung des magnetischen Widerstandes im Eisen und unter Voraussetzung eines homogenen Magnetfeldes ist

$$R_m \sim x, \text{ daraus folgt } F = C \cdot \frac{i^2}{x^2}.$$

Da die Annahmen am realen Modell nicht erfüllt sind, wird die Aufnahme der Kennlinie zur Feststellung des Gültigkeitsbereiches erforderlich.

Trägt man den Strom über dem Abstand bei konstantem Gewicht und Form für einen bestimmten Fall auf, so ergibt sich folgender Graph.

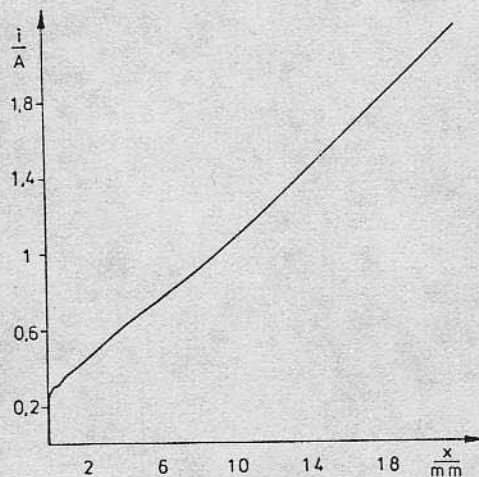


Abb. 9

Es wird erkennbar, daß sich die Kurve einer Geraden nähert, aber im Bereich $0 \leq x \leq 7,5$ mm Abweichungen aufweist.

Somit ist ab $x > 7,5$ mm obiger Ansatz gerechtfertigt. Da ein möglichst großer Abstand ohnehin erstrebenswert ist, sollen die weiteren Betrachtungen für $x > 7,5$ mm erfolgen.

Damit wird die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x}(t) = mg - C \frac{i^2}{x^2} \quad . \quad (25)$$

Nach Linearisierung um die Sollage x_S mit

$$i(t) = i_S + i_1(t) \quad ; \quad x(t) = x_S + x_1(t)$$

ergibt sich

$$m\ddot{x}_1(t) = mg - C \frac{i_S^2}{x_S^2} - 2C \cdot \frac{i_S}{x_S^2} i_1(t) + 2C \cdot \frac{i_S^2}{x_S^2} x_1(t) \quad .$$

In der Sollage gilt $mg = C \cdot \frac{i_S^2}{x_S^2}$. Damit läßt sich i_S eliminieren , und man erhält die Differentialgleichung für kleine Abweichungen um die Sollage :

$$- \frac{x_S}{2g} \ddot{x}_1(t) + x_1(t) = \sqrt{\frac{C}{mg}} i_1(t) \quad . \quad (26)$$

Bemerkenswert ist die Tatsache , daß der homogene Teil der Differentialgleichung nicht von m abhängt .

Aus Gleichung (26) ergibt sich die Übertragungsfunktion der Strecke :

$$G_S(p) = \frac{x_1(p)}{I_1(p)} = \frac{K_S}{(1 - T^2 p^2)} = \frac{K_S}{(1 + T p)(1 - T p)} \quad (27)$$

mit $K_S = \sqrt{\frac{C}{mg}}$ und $T = \sqrt{\frac{x_S}{2g}}$.

Hierin sind

$m = 108.7 \text{ g}$	Masse des aufzuhängenden Körpers
$g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$	Erdbeschleunigung
$x_S = 14.7 \text{ mm} = \frac{3}{2} \cdot 9.81 \text{ mm}$	Sollage des Körpers
$C = 97.8 \frac{\text{Nmm}^2}{\text{A}^2}$	

Die Strecke hat die Form von Gleichung (10) und ist instabil .

2.1.4 Regler

Die Schaltung des PID-Reglers entspricht der aus [1]. Die Übertragungsfunktion lautet :

$$G_R = - \left(K_P + \frac{K_I}{p} + \frac{K_D}{1 + T_D p} \right) \quad (28)$$

$$= - \frac{K_R (1 + T_{R1} p)(1 + T_{R2} p)}{p(1 + T_D p)} \quad (29)$$

$$K_P = K_R(T_{R1} + T_{R2}) - K_I T_D$$

$$K_P = 0 \div 1000$$

$$K_I = K_R$$

$$K_I = 0 \div 100 \text{ s}^{-1}$$

$$K_D = K_R T_{R1} T_{R2} - K_P T_D$$

$$K_D = 0 \div 100 \text{ s}$$

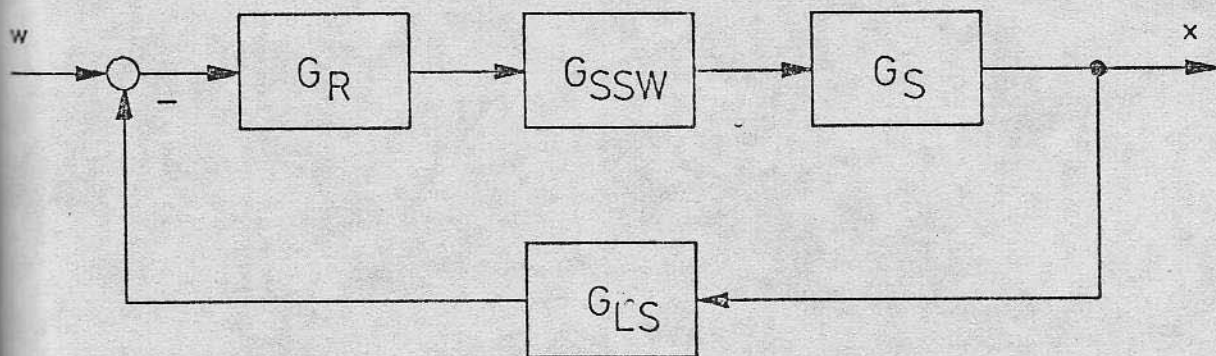
2.2' Berechnung der Übertragungsfunktion des offenen Kreises

Abb. 10

Mit Abb. 10 läßt sich die Übertragungsfunktion des offenen Kreises berechnen :

$$\begin{aligned} G_O(p) &= G_R G_{SSW} G_S G_{LS} \\ &= G_R \frac{K_w}{1 + T_v p} \frac{K_S}{(1 + T_p)(1 - T_p)} K_{LS} \\ &= K_S G_R \frac{1 \frac{\text{mA}}{\text{min}}}{(1 + 27.4 \text{ms } p)(1 - 27.4 \text{ms } p)(1 + 8 \text{ms } p)} \end{aligned} \quad (30)$$

Hiermit wird die Behandlung des Regelkreises und die Synthese eines Reglers anhand des WOK-Verfahrens möglich .

3. Simulation auf dem Analogrechner

3.1 Nichtlineare Rechelemente

Um auch nichtlineare Strecken simulieren zu können, stehen nichtlineare Rechelemente zur Verfügung. Hier seien insbesondere die Beschaltungen von Multiplizierer (Abb.11a) und Dividierer (Abb.11b) aufgezeigt.

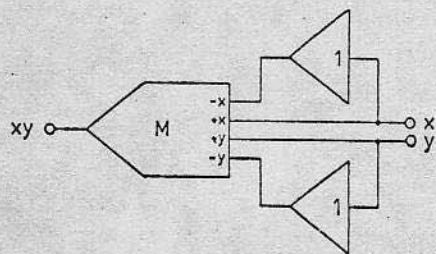


Abb.11a

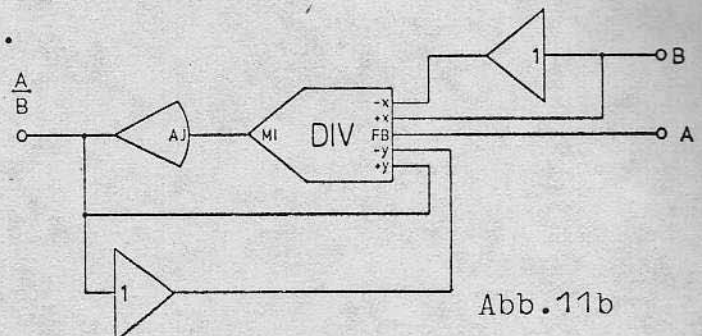


Abb.11b

Zur Simulation beliebiger Funktionen kann man auf Funktionsgeber zurückgreifen, die an die jeweilige Aufgabenstellung angepaßt werden können.

3.1.1 Strecke

Wie in [3] gezeigt, müssen die Differentialgleichungen durch eine Amplituden- und Zeitskalierung auf den Rechner zugeschnitten werden.

Mit der Amplitudenskalierung

$$x(t) = A_2 x_2(t) \quad ; \quad A_2 = 200 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$x(t) = A_1 x_1(t) \quad ; \quad A_1 = 0.4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$x(t) = A_0 x_0(t) \quad ; \quad A_0 = 0.045 \text{ m}$$

$$i(t) = B i_0(t) \quad ; \quad B = 2 \text{ A}$$

(31)

kann Gleichung (25) angeschrieben werden :

$$m\ddot{x}(t) = mg - c \cdot \frac{i^2(t)}{x^2(t)}$$

$$\ddot{x}(t) = g \left(1 - K_S^2 \frac{i^2(t)}{x^2(t)} \right)$$

$$A_2 \ddot{x}_2(t) = g \left(1 - K_S^2 \frac{B^2 i_0^2(t)}{A_0^2 x_0^2(t)} \right)$$

$$\ddot{x}_2(t) = \frac{g}{A_2} - \left(\frac{K_S B}{A_2 A_0} \frac{i_0(t)}{x_0(t)} \right)^2$$

(32)

Hiermit kann die Schaltung (Abb.12) gezeichnet werden.

3. Simulation auf dem Analogrechner

3.1 Nichtlineare Rechelemente

Um auch nichtlineare Strecken simulieren zu können, stehen nichtlineare Rechelemente zur Verfügung. Hier seien insbesondere die Beschaltungen von Multiplizierer (Abb.11a) und Dividierer (Abb.11b) aufgezeigt.

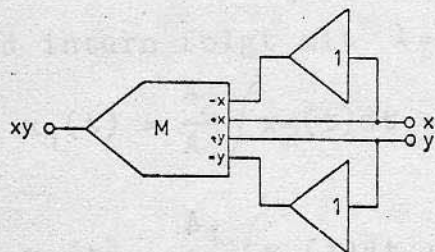


Abb.11a

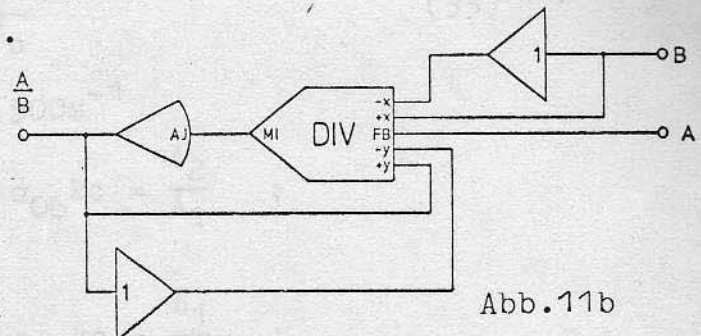


Abb.11b

Zur Simulation beliebiger Funktionen kann man auf Funktionsgeber zurückgreifen, die an die jeweilige Aufgabenstellung angepaßt werden können.

3.1.1 Strecke

Wie in [3] gezeigt, müssen die Differentialgleichungen durch eine Amplituden- und Zeitskalierung auf den Rechner zugeschnitten werden.

Mit der Amplitudenskalierung

$$x(t) = A_2 x_2(t) ; \quad A_2 = 200 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$x(t) = A_1 x_1(t) ; \quad A_1 = 0.4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$x(t) = A_0 x_0(t) ; \quad A_0 = 0.045 \text{ m}$$

$$i(t) = B i_0(t) ; \quad B = 2 \text{ A}$$

(31)

kann Gleichung (25) angeschrieben werden :

$$m\ddot{x}(t) = mg - C \frac{i^2(t)}{x^2(t)}$$

$$\ddot{x}(t) = g \left(1 - K_S^2 \frac{i^2(t)}{x^2(t)} \right)$$

$$A_2 \ddot{x}_2(t) = g \left(1 - K_S^2 \frac{B^2 i_0^2(t)}{A_0^2 x_0^2(t)} \right)$$

$$x_2(t) = \frac{g}{A_2} - \left(\frac{K_S B}{A_0} \frac{i_0(t)}{x_0(t)} \right)^2 \quad (32)$$

Hiermit kann die Schaltung (Abb.12) gezeichnet werden.

3.1.4 Schaltung

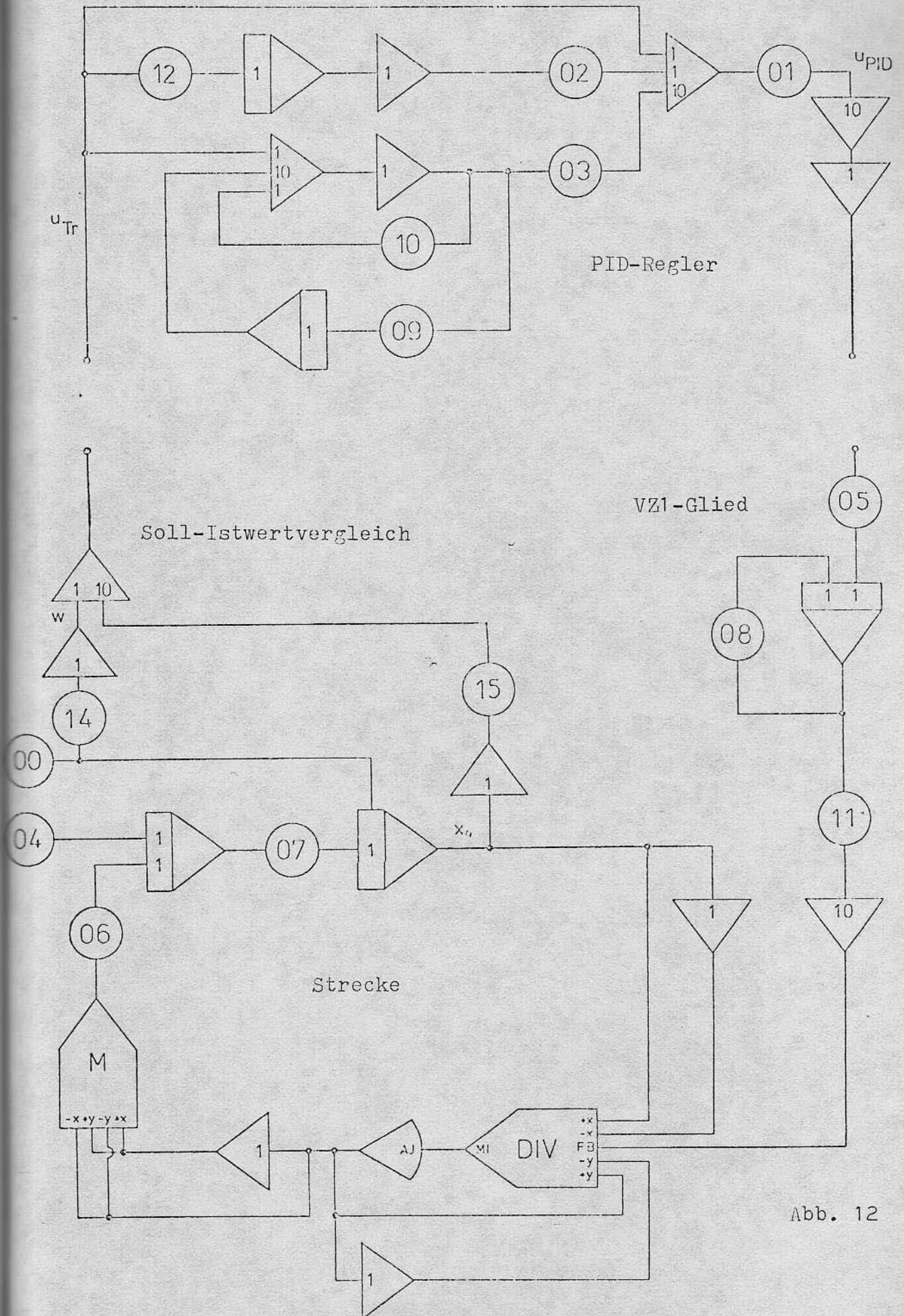


Abb. 12

3.3 Messung der Sprungantwort

Wenn das auf dem Analogrechner simulierte System stabil ist, gibt es zwei Methoden, um die Sprungantwort zu bestimmen.

1. In der Betriebsart DR (Dauerrechnen, auch OP) wird ein sprungförmiges Signal angelegt. Mit einem Oszillographen oder einem Schreiber kann die Systemantwort beobachtet werden.
2. In der Betriebsart RR (repetierendes Rechnen) werden passende Anfangsbedingungen vorgegeben.

Ist das System jedoch instabil, versagt die 1. Methode, da die Verstärker übersteuern. In diesem Falle ist nur die 2. Methode anwendbar. Die Rechnung muß abgebrochen werden, bevor einer der Verstärker übersteuert.

4. Versuchsvorbereitung

- 4.1 Die Potentiometerwerte α_{00} , α_{04} , α_{06} , α_{07} und α_{16} sind für $\lambda = 1$ (Echtzeitbetrieb) und die angegebenen Daten der magnetischen Aufhängung zu berechnen.
- 4.2 Die Übertragungsfunktion $G_R(p) = \frac{U_{PID}(p)}{U_{TR}(p)}$ (Abb.12) ist als Funktion der Koeffizienten α_{01-03} und $\alpha_{10,11}$ anzugeben. Was geschieht für $\alpha_{10} = 1$?
($\alpha_{09} = 0.01$, $\alpha_{10} = 0.38$)
- 4.3 Berechnen Sie mit Hilfe des Hurwitz-Kriteriums die kritischen Verstärkungen der geregelten Strecke und zeichnen Sie die WOK.
($T_{R1} = 27.4\text{ms}$, $T_{R2} = 10\text{s}$, $T_D = 12.5\text{ms}$)
- 4.4 Bestimmen Sie α_{01} , α_{02} und α_{03} für die kritischen Verstärkungen sowie für folgende Werte (Abb.3):
 $T_{R1} = 33\text{ms}$, $T_{R2} = 33\text{s}$, $K_R = 14 \frac{\text{A}}{\text{m}}$.

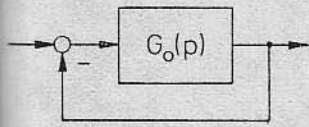
5. Versuchsdurchführung und Auswertung

- 5.1 Es ist jeweils die Gleichung der Regelstrecke und des PID-Reglers zu stecken und die Sprungantwort aufzunehmen. Die Ergebnisse sind zu diskutieren.
- 5.2 Die Stabilitätsgrenzen des geschlossenen Regelkreises sind für a) $T_{R1} = 27.4 \text{ ms}$, $T_{R2} = 10 \text{ s}$, $T_D = 12.5 \text{ ms}$
 b) $T_{R1} = 33 \text{ ms}$, $T_{R2} = 33 \text{ s}$, $T_D = 12.5 \text{ ms}$ zu bestimmen und mit den Berechnungen zu vergleichen.
- 5.3 Diskutieren Sie die Sprungantwort anhand der WOK bei Veränderung von α_{01} .
- 5.4 Warum kann ein Pol der Strecke mit positivem Regelteil nicht durch eine Nullstelle des Reglers kompensiert werden?

6. Literatur

- [1] Moll, H.: Versuch "Dosierbandwaage", Regelungstechnisches Praktikum, Universität Karlsruhe.
- [2] Föllinger, O.: Regelungstechnik, Alfred Hüthig-Verlag, Heidelberg 1972
- [3] Reinsch, R.: Versuch "Analogrechner I", Regelungstechnisches Praktikum, Universität Karlsruhe.
- [4] Ober, C.: Versuch "Durchfluß- und Füllstandsregelung", 2.2, Universität Karlsruhe.

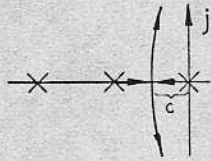
7. Anhang

Regeln für die Konstruktion von Wurzelortskurven (WOK)

$$G_O(p) = k \frac{\prod_{i=1}^m (p - p_{Zi})}{\prod_{j=1}^n (p - p_{pj})} = k \frac{\prod_{i=1}^m p - p_{Zi}}{\prod_{j=1}^n p - p_{pj}} e^{j(\sum \alpha_i - \sum \beta_j)}$$

Symmetrie	Die WOK ist symmetrisch zur reellen Achse
Anfangs- und Endpunkte	Die WOK beginnt für $k=0$ bei den Polen und endet für $k \rightarrow \infty$ bei den Nullstellen von $G_O(p)$.
Zahl der Äste	Die Zahl der getrennten Äste ist gleich der Zahl der Pole von $G_O(p)$ (für $n \geq m$).
Ein- und Austrittswinkel	Die WOK verläßt einen Pol p_v unter dem Winkel $\beta_v = -180^\circ + \alpha_i - \beta_j$, $j \neq v$ (β_j - andere Pole) Die WOK mündet in eine Nullstelle p_{Zv} unter dem Winkel $\alpha_v = 180^\circ + \beta_j - \alpha_i$, $i \neq v$ (α_i - andere Nullst.).
Asymptoten	Für große p strebt die WOK den $(n - m)$ Asymptoten zu. Diese haben den Winkel zur reellen Achse $\varphi_A = \frac{180^\circ \pm \lambda 360^\circ}{n - m}, \quad \lambda = 0, 1, 2, \dots$ Ihr Schnittpunkt liegt auf der reellen Achse bei (Wurzelschwerpunkt) $C_A = \frac{\sum_{j=1}^n p_{pj} - \sum_{i=1}^m p_{Zi}}{n - m}$

Verzweigung auf der reellen Achse



a) reelle Pole und Nullstellen

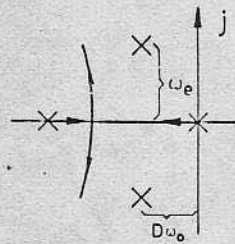
$$\sum_i \frac{1}{c - p_{zi}} = \sum_j \frac{1}{c - p_j}$$

b) zusätzlich konjugiert komplexe Pole und Nullstellen

Die Gleichung unter a) ist auf beiden Seiten zu erweitern um

$$\sum_i \frac{2(c + D_i \omega_{oi})}{(c + D_i \omega_{oi})^2 + \omega_{ei}^2} = \sum_j \frac{2(c + D_j \omega_{oj})}{(c + D_j \omega_{oj})^2 + \omega_{ej}^2},$$

$$\text{mit } \omega_e = \omega_o \sqrt{1 - D^2}.$$



Lage auf der reellen Achse

Jeder Teil der reellen Achse, auf dessen rechter Seite die Summe der Pole und Nullstellen ungerade ist, stellt einen Wurzelort dar.

Schnittpunkt mit der imaginären Achse

Stabilitätsgrenze ω_{krit} aus der allgemeinen Bedingung $G_o(j\omega_k) + 1 = 0$ bestimmen.

Summe der Realteile

Für $n - m \geq 2$ ist die Summe der Realteile aller Wurzelorte $p(k) = \text{const.}$
Hiermit Bezifferung mit k besonders einfach.

Potential-Analogie

Die WOK verläuft in der Nähe der reellen Achse konkav zu benachbarten Nullstellen und konvex zu benachbarten Polen von $G_o(p)$.

4.1 (nach 3.1.1)

$$\alpha_{04} c_1 = \frac{g}{A_2}$$

$$\alpha_{04} = \frac{9.81 \frac{m}{s^2}}{200 \frac{m}{s^2}} = 0.0491$$

$$\alpha_{06} = \frac{A_2}{A_1} \frac{1}{kc} = \frac{200 \frac{m}{s^2}}{0.4 \frac{m}{s}} \frac{1}{500 \frac{1}{s} 1} = 1$$

$$\alpha_{07} = \frac{A_1}{A_0} \frac{1}{kc} = \frac{0.4 \frac{m}{s}}{0.045 m} \frac{1}{500 \frac{1}{s} 1} = 0.01778$$

4.2 $G_P(p) = 1$

$$G_I(p) = \frac{\alpha_{02} k}{p}$$

$$U_{Tr}(p) + \alpha_{10} U_R(p) - \frac{10\alpha_{09} k}{p} U_R(p) = U_R(p)$$

$$G_D(p) = \frac{U_R(p)}{U_{Tr}(p)} = \frac{1}{1 - \alpha_{10} + \frac{10\alpha_{09} k}{p}} = \frac{\frac{p}{10\alpha_{09} k}}{1 + \frac{1 - \alpha_{10}}{10\alpha_{09} k} p}$$

$$\begin{aligned} G_R(p) &= \frac{U_{PID}(p)}{U_{Tr}(p)} = -(G_P(p) + G_I(p) + 10\alpha_{03} G_D(p)) \alpha_{01} \\ &= -(\alpha_{01} + \frac{\alpha_{01} \alpha_{02} k}{p} + \frac{\frac{\alpha_{01} \alpha_{03}}{\alpha_{09} k}}{1 + \frac{1 - \alpha_{10}}{10\alpha_{09} k} p} p) \\ &= -(K_P + \frac{K_I}{p} + \frac{K_D p}{1 + T_D p}) \end{aligned}$$

$$\alpha_{01} = K_P$$

$$\alpha_{02} = \frac{K_I}{\alpha_{01} k}$$

$$\alpha_{03} = \frac{\alpha_{09} k}{\alpha_{01}} K_D$$

4.3 (nach 1.1.3 und 1.2.2)

$$a_4 = 2740 \text{ ms}^3, a_3 = 461.7 \text{ ms}^2, a_2 = 6.9 \text{ ms}$$

$$\underbrace{K_R^2 a_4 K_S^2 T_{R2}^2}_A + \underbrace{K_R (K_S a_3^2 - T_{R2} a_2 a_3 K_S - 2 a_4 K_S T_{R2})}_B + \underbrace{a_4 + a_2 a_3}_C = 0$$

$$A = 2.5131 \cdot 10^7 \text{ ms}^5 \frac{\text{m}^2}{\text{A}^2}$$

$$B = -8.2788 \cdot 10^5 \text{ ms}^4 \frac{\text{m}}{\text{A}}$$

$$C = 5925.7 \text{ ms}^3$$

$$K_{R1/2} = -\frac{B}{2A} \pm \sqrt{\frac{B^2}{4A^2} - \frac{4AC}{2A}} = (16.47 \pm 5.96) \frac{\text{A}}{\text{m}} \text{ms}^{-1}$$

$$K_{R\max} = 22.43 \frac{\text{A}}{\text{m}} \text{ms}^{-1}; k = 34960 K_{RA} \frac{\text{m}}{\text{A}};$$

$$K_{R\min} = 10.51 \frac{\text{A}}{\text{m}} \text{ms}^{-1}$$

$$\text{WOK: } \omega_{1/2} = \pm \sqrt{\frac{a_1}{a_3}}; a_1 = K_S K_R T_{R2} - 1$$

$$a_{1\max} = 1.148, \omega_{1+/-} = \pm 49.9 \text{ s}^{-1}$$

$$a_{1\min} = 0.00654, \omega_{2+/-} = \pm 3.8 \text{ s}^{-1}$$

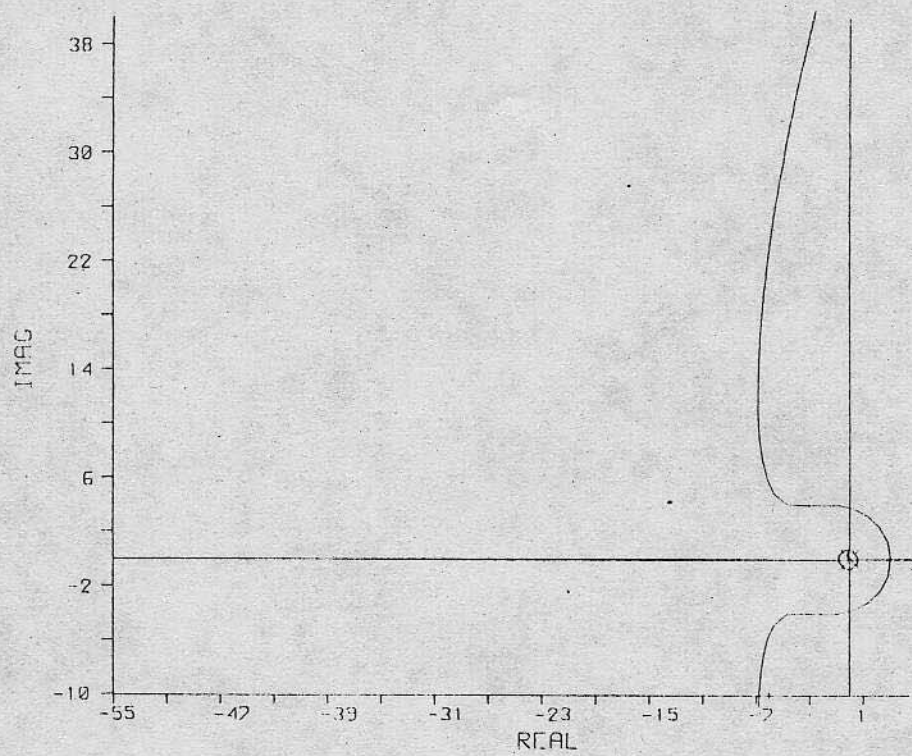
$$1. p_1 = 0 \text{ s}^{-1}, p_2 = 36.5 \text{ s}^{-1}, p_3 = -125 \text{ s}^{-1}, \\ p_4 = -80 \text{ s}^{-1}, p_{Z2} = -10 \text{ s}^{-1}$$

$$2. c_A = -52.8 \text{ s}^{-1}$$

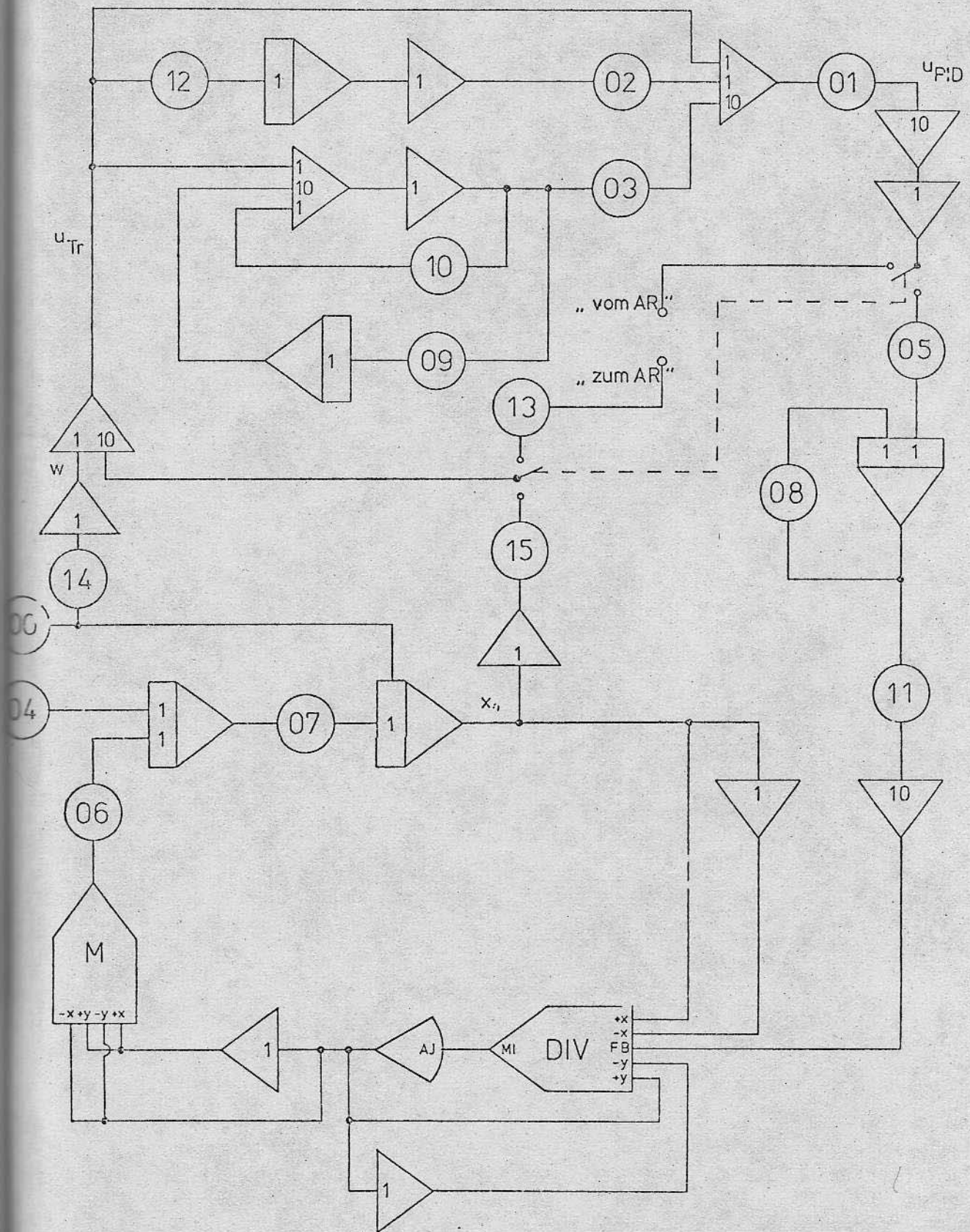
$$\varphi_{A0} = 60^\circ, \varphi_{A1} = 180^\circ, \varphi_{A2} = -60^\circ$$

$$3. \frac{1}{c+0.1 \text{ s}^{-1}} = \frac{1}{c-0 \text{ s}^{-1}} + \frac{1}{c-36.5 \text{ s}^{-1}} + \frac{1}{c+125 \text{ s}^{-1}} + \frac{1}{c+80 \text{ s}^{-1}}$$

$$c = 3.6 \text{ s}^{-1}$$



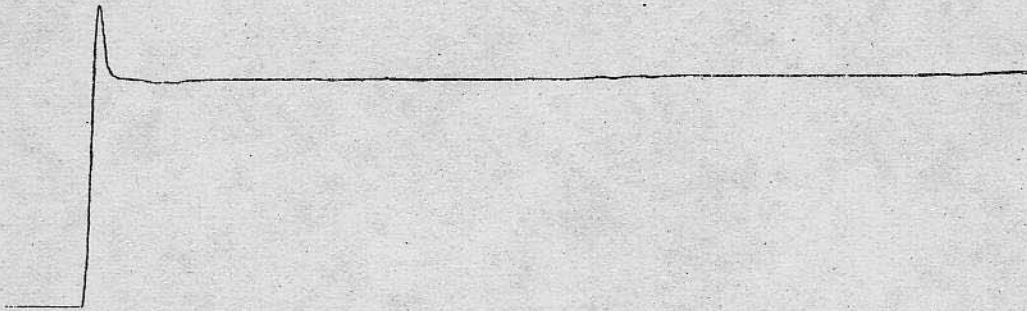
4.4	T_{R1}	0.0274s	0.0274s	0.033s
	T_{R2}	10s	10s	33s
	K_R	$22.43 \frac{A}{m} s^{-1}$	$10.51 \frac{A}{m} s^{-1}$	$7 \frac{A}{m} s^{-1}$
	Abb.	s.o.	s.o.	3
	K_I	$22.43 s^{-1}$	$10.61 s^{-1}$	$7 s^{-1}$
	K_P	224.63	105.16	231.1
	K_D	3.34 s	1.56 s	4.73 s
	σ_{01}	224.6	105.2	231
	σ_{02}	$1.99 \cdot 10^{-4}$	$1.8 \cdot 10^{-4}$	$6.1 \cdot 10^{-5}$
	σ_{03}	0.0743	0.0743	0.1024



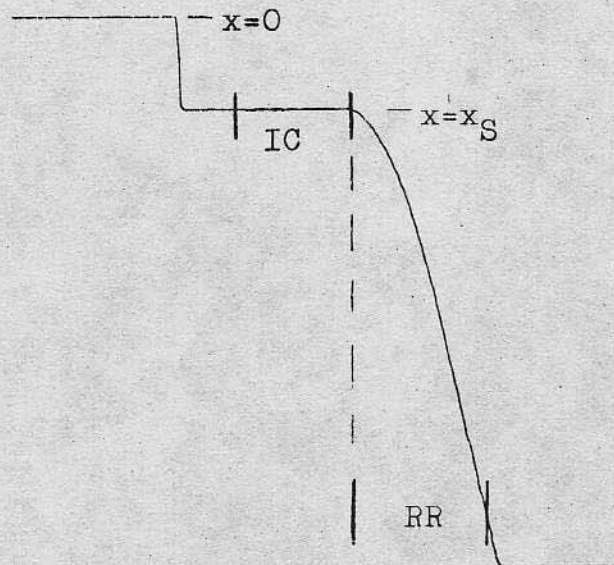
$$\alpha_{13} = 0.154$$

5.1 Sprungantworten für $T_{R1}=10s$, $T_{R2}=27.4ms$, $\alpha_{01}=0.18$

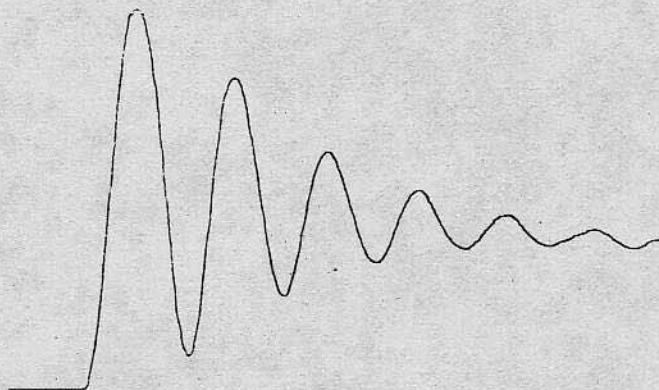
a) Regler



b) Strecke



c) Geregelte Strecke



Einstellmöglichkeiten

	S	K _P	K _I	K _D
Kugel , 109g				
PD, stabil	5.5	2.5	0	0.6
PID, stabil	5.5	1	10	1
Langsames Schwingen	5.5	0.4	6	0.125
Einspringen	1.3	1	0	0.02
Kugel , 20g				
PD, stabil	6.5	1	0	0.2
PID, stabil	6.5	1	5	0.2
Langsames Schwingen	7.3	0.3	7	0.1
Einspringen	6.5	1	1	0.05
Schnelles Schwingen	9	2.5	2	1.5